Exercice 1 : 4points

On se propose de résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) suivante :(E) : $z^4 - 4iz^3 - 12z^2 - 4iz - 13 = 0$

1. Vérifier que $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ sont racines de l'équation (E) 1pt
2. Mettre l'équation (E) sous la forme : $(z^2+1)(az^2+bz+c) = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera. 1,5pt
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'inéquation (E). 1,5pt

Exercice 2 : 3 points

f est la fonction numérique de la variable réelle x, définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. Déterminer les fonctions :

   $f_2 = f \circ f$

   $f_3 = f_2 \circ f$

   $f_4 = f_3 \circ f$
2. Pour tout naturel $n \geq 3$, on définie la fonction f_n par : $f_n = f_{n-1} \circ f$.
   Démontrer par récurrence que $f_n(x) = \sqrt{x^2+n}$

PROBLEME

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \dfrac{4x^2+4x-9}{x^2-1}$
et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal
(unités : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées).

1. (a) Préciser l'ensemble de définition de f 1pt
   (b) Démontrer que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. 1,5pt
2. Dans la suite du problème, on pourra utiliser l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$.
   Etudier la fonction f : variation des asymptotes. 3,5pts
3. (a) Quelles sont les coordonnées du point A où (C) coupe l'axe des ordonnées ?
   Ecrire l'équation de la tangente à (C) en ce point. 1pt
   (b) Quelles sont les coordonnées du point B où (C) coupe la droite d'équation $y = 4$? 1pt
4. (a) Calculer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1/2)$, $f(3/4)$, $f(3)$, et $f(4)$. 1,5pt
   (b) Tracer avec soin la courbe (C). 2pts
5. Calculer l'aire, en cm 2 , du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 4$, $x = 5/4$ et $x = 2$.
6. Exprimer le résultat en fonction de $log 2$ et $log 3$. 1,5pt