

# BAC C R.C.I.

## session 87

### EXERCICE I

(3 points)

1°) Les entiers naturels  $\overline{34}$ ,  $\overline{13}$ ,  $\overline{1102}$  sont écrits dans la base  $a$ ,  $a$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Trouver  $a$  sachant que  $\overline{34} \times \overline{13} = \overline{1102}$ .

2°) Soit  $n$  un entier naturel s'écrivant  $\overline{4p32}$  dans la base cinq, avec  $p$  entier naturel inférieur ou égal à 4.

- Déterminer  $p$  pour que  $n$  soit divisible par 2.
- Déterminer  $p$  pour que  $n$  soit divisible par 4.
- Déterminer  $p$  pour que  $n$  soit divisible par 3.
- $n$  peut-il être divisible par 6?

### EXERCICE II

(4 points)

On considère l'équation (E) d'inconnue  $z$  appartenant à l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes :

$$(E) \quad z^3 + 2iz^2 + iz + 1 + 3i = 0$$

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure, puis résoudre (E) dans  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$  les trois solutions de (E), les notations étant choisies de manière que ;

$$\operatorname{Re}(z_0) < \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2).$$

où  $\operatorname{Re}(z)$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $z$ .

2°) Dans le plan complexe de repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

a) Montrer que  $M_0M_1M_2$  est un triangle rectangle isocèle.

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $S$  qui applique  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  respectivement sur les points d'affixes  $0$ ,  $i$  et  $1$ . Déterminer le rapport et le centre de  $S$  ainsi qu'une mesure de son angle à 0,1 degré près.

### PROBLEME

(12 points)

#### Partie A:

Dans le plan  $\mathcal{P}$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les courbes (C) et (H) d'équations suivantes :

$$(C) : \quad x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(H) : \quad x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0$$

1°) Déterminer la nature des courbes (C) et (H). Tracer avec soin les courbes (C) et (H) sur un même dessin (unité : 2 cm).

2°) Soit la fonction :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$$

a) Montrer que la courbe représentative  $(C_g)$  de la fonction  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est une partie de  $(C) \cup (H)$  que l'on précisera.

b) La courbe  $(C_g)$  admet-elle des asymptotes? Un axe de symétrie? Les préciser.

c) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(3-x)$ .

d) Représenter  $(C_g)$  sur le dessin précédent à l'aide d'une couleur différente.

#### Partie B

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x+1} g(t) dt$$

Sans chercher à exprimer autrement  $f(x)$ , on se propose d'obtenir l'allure de la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les questions 1°), 2°), 3°) et 4°) sont indépendantes, et on en fait la synthèse au 5°).

1°) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Etudier le sens de variation de  $f$ . (On démontrera que l'on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x+1) - g(x)$  et, pour calculer le minimum de la fonction  $f$ , on notera que la valeur de ce minimum est l'aire d'une partie remarquable du plan.

2°) Etude de  $f(x)$  pour les "grandes valeurs" de  $x$ .

a) Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[2, +\infty[$ . Comparer pour  $t$  appartenant à  $[a, a+1]$ , les nombres  $g(a)$ ,  $g(a+1)$  et  $g(t)$ .

En déduire que  $g(a) < f(a) < g(a+1)$ .

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Soit la fonction  $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Déterminer le signe de  $u(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[2, +\infty[$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ . En déduire le signe de

$$\int_x^{x+1} u(t) dt \text{ pour } x \text{ appartenant à } [2, +\infty[,$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} u(t) dt.$$

c) Pour tout nombre réel  $x$ , exprimer  $f(x)$  à l'aide de la fonction  $u$ .

En déduire une écriture de  $f(x)$  de la forme :

$f(x) = ax + b + \varphi(x)$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et  $\varphi$  une fonction numérique telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .

d) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C_f)$  et préciser la position, par rapport à la droite  $(\Delta)$ , de la partie de  $(C_f)$  située dans le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathcal{P}; x > 2\}$ .

3°) Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) - f(2-x)$$

Calculer  $h(1)$ . En déduire que  $(C_f)$  admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

4°) Estimation de  $f(2)$ .

a) Soit  $\&$  l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  telles que :

$2 < x < 3$  et  $0 < y < g(2)$ . On note  $s(\&)$  l'aire du domaine  $\&$ . Démontrer que  $s(\&) = f(2)$ .

b) A partir du dessin sur papier millimétré de la courbe  $(C_f)$ , donner sans calcul une estimation de  $s(\&)$  en  $\text{mm}^2$  puis en unités d'aire, l'unité d'aire étant celle d'un carré de 2 cm de côté. En déduire une valeur approchée de  $f(2)$ .

5°) Donner l'allure de la courbe  $(C_f)$  (Sur une autre feuille que celle utilisée pour (C) et (H)).