BAC C R.C.I. session 88(rempl)

EXERCICE I

(4 points)

Soit ABCD un rectangle dans lequel BC = 2AB et $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note A' le symétrique de A par rapport à B. Un point M décrit le segment [DC], la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la parallèle à (BC) passant A' au point N, et on appelle I le milieu du segment [MN].

1°) Démontrer que le triangle AMN est isocèle.

2°) Quel est l'ensemble (E) des points I quand M décrit le segment [DC]?

(On pourra utiliser une transformation appliquant M en I.)

Représenter sur la figure l'ensemble (E). (*On justifiera soigneusement le tracé réalisé*).

EXERCICE II

(4 points)

Deux cercles Γ et (Γ') sont sécants en deux points A et A'.

Une droite (Δ) coupe chacun des deux cercles en deux points distincts de A et A'. On appelle M et N les points d'intersection de (Δ) et (Γ), P et Q les points d'intersection de (Δ) et (Γ').

1°) Montrer que les droites (A'M) et (AQ) sont parallèles si et seulement si les droites (A'P) et (AN) le sont.

2°) On suppose que les droites (A'M) et (AQ) sont sécantes. On appelle I le point d'intersection de (A'M) et (AQ) et J le point d'intersection de (A'P) et (AN).

Montrer que les points A, A', I et J sont cocycliques.

PROBLEME

(12 points)

La fonction logarithme népérien est notée ln.
Dans tout le problème, t est un nombre réel de l'intervalle [0; 1].

Partie A:

Soit la fonction numérique f_t définie par :

$$f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1 - t x^3 - 2 \ln x$$

1°) Etudier la fonction f_t *(ensemble de définition, dérivabilité, tableau de variation, limites aux bornes de l'ensemble de définition)*

2°) a) Montrer que pour tout nombre réel t de [0; 1] , il existe un unique nombre réel a_t strictement positif, tel que: $f_t(a_t) = 0$.

b) Montrer que $1 \leq a_t \leq \sqrt{e}$.

Partie B

Soit la fonction g_t : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2} - t x$$

(C_t) désigne la courbe représentative de g_t dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) a) Quel est l'ensemble de définition D de la fonction g_t?

b) Déterminer, suivant les valeurs de t, les limites de la fonction g_t aux bornes de D.

c) Préciser, suivant les valeurs de t, les asymptotes à la courbe (C_t).

2°) Montrer qu'en tout point x de D, g_t est dérivable et que $g'_t(x) = \frac{1}{x^3} f_t(x)$

3°) a) Dresser le tableau de variation de la fonction g_t.

b) Donner une expression de $g_t(a_t)$ ne faisant pas intervenir la fonction logarithme.

4°) Soit A_t le point de la courbe (C_t) d'abscisse 1.

a) Déterminer l'équation de la droite (D_t) tangente en A_t à (C_t).

b) Montrer qu'il existe un point commun à toutes les droites (D_t).

5°) a) Etudier la position relative de (C_t) et de la droite (Δ_t), d'équation $y = -tx$.

b) t et t' étant deux nombres réels de [0; 1], étudier la position relative des courbes (C_t) et $(C_{t'})$.

6°)Dans le même repère (unité = 4 cm), tracer les courbes (C_0), $(C_{0,5})$ et (C_1). (1,14 est une valeur approchée de $a_{0,5}$ à 10^{-2} près).

Partie C

Soit les fonctions

$$\varphi : [0; 1] \longrightarrow [1; \sqrt{e}]$$
$$t \longmapsto a_t$$

et $$\Psi : [1; \sqrt{e}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto \frac{1 - 2 \ln a}{a^3}$$

1°) a) Donner le tableau de variation de Ψ.

b) En déduire que Ψ réalise une bijection dérivable de [1, $\sqrt{e}$] sur un intervalle I de IR que l'on déterminera. Dans la suite du problème, Ψ désigne cette bijection.

c) Justifier que Ψ^{-1} est dérivable sur I et préciser le signe de sa fonction dérivée.

2°) a) Déterminer l'application $\Psi \circ \varphi$.

b) En déduire que φ est une bijection de [0; 1] sur [1, $\sqrt{e}$] et que φ est dérivable et décroissante sur [0, 1].