BAC C R.C.I. session 88

EXERCICE I

Dans le plan $(\mathcal{P})$, soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC, et P un point du segment [BC] distinct de B et de C. La parallèle menée par P à (AB) coupe (AC) en B', et la parallèle menée par P à (AC) coupe (AB) en C'.

1°) Montrer que AC' = B'C.

2°) Justifier l'existence d'un unique antidéplacement f de $(\mathcal{P})$ tel que : f(A) = C et f(C') = B'. Préciser la nature de cette transformation.

3°) a) Montrer que f(B) = A.

b) En déduire la décomposition canonique de f.

EXERCICE II

Dans tout l'exercice, m et n désignent deux entiers naturels qui ont le même chiffre des unités dans l'écriture décimale.

1°) a) Montrer que m^5 et n^5 ont même chiffre des unités.

b) Pour chaque élément $\hat{a}$ de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, donner la valeur de $\hat{a}^5$.

c) Montrer que si deux entiers naturels b et c sont tels que: b^5 et c^5 ont même chiffre des unités, alors b et c ont aussi même chiffre des unités (en écriture décimale).

2°) a) Montrer que m - n est divisible par 10.

b) Montrer que $m^2 - n^2$ est divisible par 20.

3°) Déterminer tous les entiers naturels m et n vérifiant: m et n ont même chiffre des unités et $m^2 - n^2 = 1940$.

PROBLEME

La fonction logarithme népérien est notée ln.

Partie A:

Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

1°) a) Etudier la fonction f *(ensemble de définition, limites, fonction dérivée, tableau de variation).*

b) Montrer que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = x$.

c) Donner une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse zéro.

2°) On considère (E): $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

a) Justifier le fait que cette équation a une unique solution non nulle. On note U_2 la solution non nulle de (E).

b) Donner un encadrement de U_2 par deux entiers consécutifs.

c) On donne le tableau suivant:

x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
ln x	-2,996	-2,036	-1,897	-1,609	-1,386	-1,204	-1,050	-0,916	-0,798	-0,693

Donner une valeur approchée à 0,1 près de U_2.

3°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). *(Unité : 2 cm).*

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - (n-1)\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

1°) a) Montrer que, pour tout nombre réel t strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1 + t) \leq t$. En déduire que $f_n(-1) \geq -\frac{1}{n}$

b) Donner le tableau de variation de f_n.

c) Montrer que: $-\frac{1}{n} \leq f_n(-1) < 0$

d) Montrer qu'il existe un unique nombre réel U_n tel que:

$U_n < -1$ et $f_n(U_n) = 0$

2°) Soit g_n la fonction :

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x-1) - f_n(-x-1).$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g_n.

b) Montrer que g_n est impaire.

c) Donner le tableau de variation de g_n.

d) Montrer que pour $n \geq 3$, on a : $f_n(-2) > 0$

e) En déduire que pour $n \geq 2$, on a : $U_n > -2$.

Partie C

1°) Ecrire le développement limité d'ordre 2 en zéro de la fonction

$[x \longmapsto \ln(1+x)]$.

2°) Soit ε une fonction numérique vérifiant

$\lim\limits_{0} \varepsilon = 0.$

Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{(n \geq 2)}$ définie par :

$\varepsilon_n = \varepsilon\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers zéro.

3°) A l'aide des questions 1°) et 2°), exprimer U_n en fonction de n et d'une suite convergeant vers zéro.

4°) Montrer que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.