LES SUJETS DES EXAMENS DU BACCALAUREAT DES ANNEES 1988-2006

SECTION: MATHEMATIQUES

Sessions	Principale	Contrôle
1988	x	
1989		x
1990	x	x
1991	x	
1992		
1993		
1994		
1995	x	x
1996	x	x
1997	x	X
1998	x	x
1999		
2000		x
2001	x	
2002	x	x
2003	x	
2004	x	x
2005		
2006		

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE EXAMEN DU BACCALAUREAT	EPREUVE : MATHEMATIQUES (Ancien programme)	
	SECTION (S) : MATH-SCIENCES MATH-TECHNIQUE	
SESSION : JUIN 1988	DUREE : 4 Heures	COEFFICIENT : 5

1er EXERCICE : (4 points)

1°) Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
(E) : $z^2 - (a + a^2)\, z + a^3 = 0$, où a est un paramètre complexe différent de 1 et -1.
On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E).

2°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives 1, z_1 , z_2 .

a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $|a| = 1$ et $|1 + a| =$

b) On pose $a = \cos\theta + i \sin\theta$ avec $\theta \in]0,\pi[$.
Déterminer le module et un argument de $1 + a$ en fonction de θ .

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral.

2ème EXERCICE : (4 points)

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{P}$.

Pour tout réel non nul α , on considère l'application f_α de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\alpha\ \overrightarrow{MB} + \alpha^2\overrightarrow{MC}$.

1°) Montrer qu'il existe un réel α_o pour lequel f_{α_o} est une translation dont on précisera le vecteur.

2°) On suppose $\alpha \neq 1$. Montrer que f_α possède un point invariant I_α que l'on déterminera.

3°) On suppose $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$. Montrer que f_α est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

PROBLEME : (12 points)

I - Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = xe^{-x}$.

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit E l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant n$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, avec $n \in \mathbb{N}$
On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire de E.
Calculer $\mathcal{A}_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$.

II - Soit la suite (u_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n} = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1°) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2°) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que pour tout réel x de $[k-1, k]$ on a : $f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1)$.

b) En déduire que : $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leqslant f(k-1)$.

3°) Prouver alors que : $\frac{n}{e^n} + \int_1^n f(x)\, dx \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{e} + \int_1^n f(x)\, dx$.

4°) En déduire que la suite (u_n) est majorée, qu'elle est convergente. Donner un encadrement de sa limite.

III - Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$,
on pose $v_p = \frac{1}{e^p} + \frac{1}{e^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

1°) Montrer que $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = u_n$ ((u_n) étant la suite définie dans II).

2°) Sachant que v_p s'écrit : $v_p = \frac{1}{e^p}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^{n-p}}\right)$,
prouver que : $v_p = \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{e^{p-1}} - \frac{1}{e^n}\right)$.

3°) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

IV - Soit F la fonction définie dans $[1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_{\operatorname{Log} x}^{2 \operatorname{Log} x} (f(t))^2\, dt = \int_{\operatorname{Log} x}^{2 \operatorname{Log} x} t^2 e^{-2t}\, dt$$

(f désigne la fonction définie dans I)
On se propose, dans cette partie, d'étudier la fonction F sans utiliser son expression en fonction de x.

1°) a) Soit G une primitive de la fonction $t \longmapsto (f(t))^2$ pour $t \in [0, +\infty[$.
Sans expliciter l'expression de G, exprimer $F(x)$ à l'aide de G.

b) En déduire que F est dérivable dans $[1, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{(\operatorname{Log} x)^2}{x^5}(8 - x^2)$

2°) a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ et pour tout $t \in [\operatorname{Log} x, 2 \operatorname{Log} x]$
on a : $\frac{t^2}{x^4} \leqslant (f(t))^2 \leqslant \frac{t^2}{x^2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $\frac{7 (\operatorname{Log} x)^3}{3 x^4} \leqslant F(x) \leqslant \frac{7 (\operatorname{Log} x)^3}{3 x^2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3°) Etudier les variations de F et donner l'allure de sa courbe représentative Γ
On précisera la tangente à Γ au point d'abscisse 1. (On donne $F(2\sqrt{2}) \simeq 0{,}11$).

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION : JUIN 1989 (Contrôle)	EPREUVE : MATHEMATIQUES SECTION (S) : MATH - SCIENCES, MATH - TECHNIQUE DUREE : 4 heures — COEFFICIENT : 5

1er EXERCICE

On considère deux dés cubiques non truqués. Les faces de l'un sont numérotées de 1 à 6 les faces de l'autre sont numérotées 2, 2, 2, 3, 4 et 4.

On lance les deux dés simultanément et on désigne par X la variable aléatoire qui, à ch lancer, associe la somme des nombres marqués sur les faces supérieures.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Soit A l'événement :

" La somme des nombres marqués sur les faces supérieures est égale à 8 ".

On répète quatre fois l'épreuve qui consiste à lancer simultanément les deux dés. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) A est réalisé exactement trois fois.

b) A est réalisé au moins une fois.

c) A est réalisé pour la première fois au troisième lancer.

2ème EXERCICE

Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

(E) $z^3 + (-2-4i)z^2 + (-9+10i)z + 18 + 6i = 0$.

1°) Vérifier que 3 est une racine de l'équation (E) et en déduire les autres racines z_1 et z_2 de (E).

(On désigne par z_1 la racine ayant une partie réelle positive).

2°) Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan et A, B, C les points d'affixes respectives 3, z_1, z_2.

a) Montrer que OABC est un parallélogramme et qu'il existe un déplacement f et un antidéplacement g transformant O en B et A en C.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Soit S la symétrie orthogonale d'axe la droite (OA). Vérifier que $g = f \circ S$ et en déduire la forme réduite de g.

PROBLEME

A - Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1°) Etudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = n \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$

a) Montrer que si x est élément de l'intervalle $[n, n+1]$ alors on a : $\dfrac{e^{-x}}{n+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{n}$

b) En déduire que : $\frac{1}{2}\,(e-1)\; e^{-(n+1)} \leqslant u_n \leqslant (e-1)\; e^{-(n+1)}$.

c) Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3°) Soit (v_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle vérifie : $v_n \leqslant \frac{1}{e}\,(1-e^{-n})$.

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

c) On pose : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Prouver que : $\frac{1}{2e} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{e}$.

B - On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f dans $\mathbb{R}^*$ et on convient que :

$$f^{(0)} = f \text{ et } f^{(1)} = f'.$$

1°) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = \frac{e^{-x}\; P_0(x)}{x} \quad ; \quad f'(x) = \frac{e^{-x}\; P_1(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^{-x}\; P_2(x)}{x^3}$$

où $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$ désignent des polynômes que l'on déterminera.

Dans la suite, on admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, f est n fois dérivable dans $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f^{(n)}(x) = \dfrac{e^{-x}\; P_n(x)}{x^{n+1}}$ où $P_n(x)$ est un polynôme.

2°) Soient a et b deux réels donnés et Φ une fonction numérique n fois dérivable dans $\mathbb{R}^*$. On pose : $\psi(x) = (ax + b)\;\phi(x)$.

Établir par récurrence, que : $\psi^{(n)}(x) = (ax + b)\;\Phi^{(n)}(x) + n\,a\;\Phi^{(n-1)}(x)$, $n \geqslant 1$, $\psi^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de la fonction ψ, $\Phi^{(n)}$ et $\Phi^{(n-1)}$ les dérivées d'ordre n et $(n-1)$ de la fonction Φ.

3°) a) En prenant $\Phi = f$, $a = 1$ et $b = 0$, prouver que :

$$P_n(x) + n P_{n-1}(x) = (-1)^n\, x^n \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ et tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $P_n(0) = (-1)^n\, n!$

4°) On définit le polynôme $Q_n(x)$ par : $P_n(x) = (-1)^n\, n!\; Q_n(x)$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$Q_n(x) - Q_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b) En déduire les expressions de $Q_n(x)$ et de $P_n(x)$.

5°) a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n'(x) - P_n(x)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle : $y' - y = (-1)^{n+1} x^n$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE		
EXAMEN DU BACCALAUREAT	JUIN 1990	SECTIONS : MATH-SCIENCES MATH-TECHNIQUE
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 4 heures	COEF : 5

1er EXERCICE (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

1°) a - Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b - Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2°) On pose $\omega = \dfrac{z_1}{z_0}$.

a) Donner la forme trigonométrique de ω.

b) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, ωz et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

2ème EXERCICE (4 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
A tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan de bord (BC) et BM = CN.

1°) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathfrak{R}$ telle que :

pour tout point M de (AB) on a : $\mathfrak{R}(M) = N$ et $\mathfrak{R}(B) = C$

Préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω

2°) Soit O le milieu du segment [BC]. On désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonale d'axe $(O\Omega)$ et on pose : $f = S_{(O\Omega)} \circ \mathfrak{R}$

a) Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3°) Soit I le milieu du segment [MN].

a) Quel est l'ensemble D des points I lorsque M décrit la droite (AB) ?

b) Construire D.

PROBLEME (12 points)

I - Soit la fonction $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad x \longmapsto f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\,dt$

1°) a - Justifier l'existence de f.

b - Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1,1\}, \ \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}$$

c - En déduire que : $\forall x \in]-1,1[, \ f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - x$

2°) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a - Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{Log}\, x \leqslant \frac{x}{k} - 1 + \mathrm{Log}\, k$

b - En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{Log}\, x\, dx \leqslant \mathrm{Log}\, k$ et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{Log}\, x\, dx \leqslant \mathrm{Log}\,(n!)$

c - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Log}\,(n!) \geqslant (n + \frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(n + \frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\, 2$

4°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\quad u_n = \mathrm{Log}\,(n!) - (n + \frac{1}{2})\mathrm{Log}\, n + n$

a - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\, 2$

b - Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = (2n+1)\, f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c - En déduire que : (u_n) est convergente.

II - Soit la suite (v_n) définie par : $\quad v_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^{\frac{n}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

1°) Calculer v_0

2°) a - Le plan étant muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $y^2 - x\,(1-x) = 0$

b - En déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3°) a - Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b - *En déduire qu'elle est convergente.*

4°) a - Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}\, v_n$

b - En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{n+2}{n+5} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1 \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

5°) a - *Montrer, par récurrence, que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n \cdot v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b - *En faisant apparaitre, dans l'expression précédente le rapport* $\frac{v_{n+1}}{v_n}$,

montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{3}{2}}\, v_n = \sqrt{2\pi}$

6°) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\quad v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)} \cdot \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!}$

III - (u_n) étant la suite définie dans I) 4)

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad e^{u_n} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot e^n$

2) Exprimer $e^{2u_p - u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p} $\quad (p \in \mathbb{N}^*)$

3) Soit ℓ la limite de la suite (u_n).

Déduire de ce qui précède que : $\ell = \mathrm{Log}\sqrt{2\pi}$

(on admettra que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_{2p} = \lim_{n \to +\infty} u_p = \ell$)

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE			
EXAMEN DU BACCALAUREAT	JUIN 1990 (contrôle)	SECTIONS : MATH-SCIENCES MATH-TECHNIQUE	
EPREUVE : MATHEMATIQUES		DUREE : 4 heures	COEF : 5

EXERCICE N°1 (4 points)

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est truqué de façon qu'à chaque jet la probabilité d'obtenir un nombre pair soit égale au double de celle d'obtenir un nombre impair.

1°) On lance le dé une fois et on désigne par p la probabilité d'obtenir un nombre impair.
   a) Calculer p.
   b) En déduire la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 2.

2°) On lance le dé trois fois. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a) on obtient deux fois et deux fois seulement le nombre 2.
   b) on obtient au moins deux fois le nombre 2.

EXERCICE N° 2 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Soit g l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 - i\sqrt{3})\,z + (1 + i)\sqrt{3}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

2°) Soit, dans le plan P, l'homothétie h de centre $\Omega\,(1, -1)$ et de rapport $\frac{1}{2}$

   On pose $f = h \circ g$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

3°) Soit D la droite dont une équation est $y = x$.
   Déterminer et construire l'image de D par l'application f.

PROBLEME (12 points)

Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé ($o, \vec{i}, \vec{j}$) et Δ la droite d'équation : $y = x$.

A) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \text{Log}(1+2x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère ($o, \vec{i}, \vec{j}$).

1°) Etudier les variations de f.

2°) On désigne par φ la fonction définie par : $\varphi(x) = f(x) - x$.

a - Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α avec $1 < \alpha < 2$.

b - Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

c - Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans le repère ($o, \vec{i}, \vec{j}$).

3°) a - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on tracera la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

b - Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout réel x.

c - Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

4°) On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a - Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n < \alpha$

b - Montrer que (U_n) est strictement croissante

c - En déduire que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

B) Dans cette partie n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$

Soit f_n la fonction numérique à variable réelle définie par : $f_n(x) = \text{Log}\,(1 + nx)$ et $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans le repère ($o, \vec{i}, \vec{j}$).

1°) Montrer que : $\forall\, x \in \left]1, +\infty\right[,\ 1 - \dfrac{1}{x} < \text{Log}\, x < \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

2°) Montrer que l'équation $f_n(x) - x = 0$ admet deux solutions (on notera α_n la solution non nulle).

3°) a - Montrer que : $\text{Log}\, n < \alpha_n < 2\,\text{Log}\, n$

b - En déduire que : $\text{Log}\, n < \alpha_n < \text{Log}\,(1 + 2n\,\text{Log}\, n)$

c - Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{\text{Log}\, n}$

4°) Soit Φ l'application du plan P dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' barycentre des points H et M affectés respectivement des coefficients (n-2) et 2, où H désigne le projeté orthogonal de M sur ($o, \vec{j}$).

a - Déterminer la nature de Φ et préciser ses éléments caractéristiques .

b - Montrer que $\Phi(\mathscr{C}_2) = \mathscr{C}_n$.

c - Construire $\mathscr{C}_4$ dans le même repère ($o, \vec{i}, \vec{j}$).

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DES SCIENCES **EXAMEN DU BACCALAUREAT**	EPREUVE : MATHEMATIQUES	
	SECTIONS : MATH.SC.(Sp.: MATHEMATIQUES) MATHEMATIQUES TECHNIQUE	
SESSION DE JUIN 1991	DUREE : 4 heures	COEF. : 5

PREMIER EXERCICE : (6 points)

On considère, dans un plan orienté, un triangle équilatéral ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à ce triangle. On construit les cercles ($\mathscr{C}'$) et ($\mathscr{C}''$) de même rayon, de centres respectifs B et C et tangents extérieurement l'un à l'autre.

1°) Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}'$) et M' le point du cercle ($\mathscr{C}''$) tel que $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Montrer que la médiatrice du segment [MM'] passe par un point fixe que l'on précisera.

2°) Le point M se projette orthogonalement en H sur (AM'); déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit ($\mathscr{C}'$).
Construire cet ensemble.

3°) Soit D le point du cercle ($\mathscr{C}$) diamétralement opposé à A et M" l'image du point M' par la rotation de centre D et d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

Montrer que M et M" sont deux points diamétralement opposés du cercle ($\mathscr{C}'$).

DEUXIEME EXERCICE : (4 points)

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit :
quatre jetons blancs numérotés 1, 2, 2, 2.
trois jetons noirs numérotés 1, 1, 2.

1°) On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.
a - Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs.
b - Calculer la probabilité pour que parmi les trois jetons tirés il y en ait deux seulement qui portent le numéro 1.

2°) On remet tous les jetons dans le sac et on tire de nouveau et successivement trois jetons de la manière suivante :
- si le jeton tiré porte le numéro 2, il est remis dans le sac.
- si le jeton tiré porte le numéro 1, il n'est pas remis dans le sac.

a - Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs.
b - Calculer la probabilité pour que deux seulement des trois jetons tirés portent le numéro 1 .

N.B : Toutes les probabilités seront calculées à 0,01 près.

PROBLEME : (10 points)

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}\right)$

A - 1) a - Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$

b - Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$

c - Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a - Soit y un réel strictement positif . Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation en x : $e^x + e^{-x} - 2 = y$

b - Montrer que f admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque g, et déduire de ce qui précède l'expression de $g(x)$.

B - 1) Soit h une fonction numérique à variable réelle, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a - Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$.

b - Soit H une primitive de h^{-1} sur $h(I)$. Démontrer que Hoh est une primitive, sur I , de la fonction $x \mapsto x\ h'(x)$.

c - Soit (α, β) un couple de I^2. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} t\ h'(t)\,dt$

2) a - Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$

b - En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations

$x = \frac{(e-1)^2}{e}$ et $y = 0$.

C - 1) a - Montrer que pour tout réel x positif, on a $\mathrm{Log}(1 + x) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{Log}(2 + x)$

b - Soit θ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$

Montrer que θ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et en déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une solution unique γ dans $]1, 4[$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(2u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [1,2]$

b - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right|$

c - En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION • • • • • **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 1995	SECTION : MATHEMATIQUES EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 heures —— Coef. : 4

EXERCICE N°1 (6 points)

Dans un plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC] .

1) a - Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.
   b - Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D. Déterminer (gof) (C) et (gof) (D). Caractériser gof.
   c - Déduire la forme réduite de l'antidéplacement g.

2) Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.
   a - Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S. Construire le centre Ω de S.
   b - Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S. En déduire que le triangle OΩC est rectangle.
   c - Déterminer l'image du carré ABCD par la similitude S.
   d - Montrer que les points A, Ω et J sont alignés.

EXERCICE N°2 (4 points)

On dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.

Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1) a - On lance le dé parfait trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît.
   Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b - On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ?

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance trois fois de suite. On considère les événements suivants :
   A : " obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".
   B : " choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".
   C : " choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ".
   a - Calculer la probabilité de l'événement B.
   b - Calculer la probabilité de l'événement C.
   c - En déduire la probabilité de l'événement A.

Voir suite au verso →

PROBLEME (10 points)

A - 1) Soit la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = e^x(2-x)-2$

a - Etudier les variations de φ .

b - Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions. On notera a la solution non nulle et on vérifiera que $1 < a < 2$.

c - En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a - Montrer que f est continue sur IR .

b - Montrer que f est dérivable sur IR et que :

Pour tout $x \in IR^*$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$

c - Montrer que $f(a) = a(2-a)$.

d - Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(Pour la construction on prendra $a = 1,6$)

3) On considère la fonction F définie sur IR_+ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

a - Justifier l'existence de F(x) pour tout réel positif x.

b - Montrer que F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

c - Donner la forme de l'intervalle F(I).

4) On considère la fonction G définie sur IR_+ par : $G(x) = \int_{Log\,2}^{x} t^2 e^{-t}\,dt$

a - Justifier l'existence de G(x) pour tout réel positif x.

b - A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

c - Montrer que :

Pour tout $t \in [Log\,2, +\infty[$ on a : $f(t) \leqslant 2t^2e^{-t}$,

et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que : Pour tout $x \in IR_+$ on a $F(x) \leqslant M$.

d - En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leqslant M$.

(Dans la suite du problème on posera $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$) .

B - Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1) a - Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots\dots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

b - Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\, e^{-nt}\, dt \leqslant \frac{a(2-a)}{n}$$

c - x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt}\, dt$

d - Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$

2) a - Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)\, e^{-nt} dt \quad .$$

En déduire que la fonction H_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $H_n(x) = \int_0^x f(t)\, e^{-nt}\, dt$ admet une limite ℓ_n, lorsque x tend vers $+\infty$, vérifiant :

$$L - \ell_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^3}\right)$$

b - En utilisant le résultat établi à la question B 1) b - , montrer que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

c - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite est convergente et a pour limite le réel L' tel que L = 2 L'.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ***** **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 1995	SECTION : MATHEMATIQUES EPREUVE : MATHEMATIQUES	SESSION DE CONTROLE
	DUREE : 4 heures ----	Coef. : 4

EXERCICE N°1 (6 points)

On considère dans un plan P orienté un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symétrique de A par rapport à C.

1) Soit f l'antidéplacement de P tel que : $f(C) = A$ et $f(A) = B$.
Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

2) Soit g la similitude directe telle que : $g(B) = D$ et $g(I) = C$.
Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3) Soit Ω le point défini par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\,\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$.
   a - Justifier que (fog) est une similitude indirecte.
   b - Déterminer (fog) (I) et (fog) (A).
   c - Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\,\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire que (fog) (Ω) = Ω .

4) a - Déterminer le rapport de la similitude (fog).
   b - Montrer que l'axe de la similitude (fog) est la perpendiculaire en Ω à la droite (AB).

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans le tableau statistique suivant, X désigne la température moyenne extérieure en 24 heures et Y désigne la consommation de pétrole de chauffage pour les mêmes 24 heures et pour une famille donnée.

X en degrés	– 2	0	4	8	10
Y en litres	40	30	20	15	10

1) Construire, dans un plan rapporté à un repère orthogonal, le nuage de points représentant la série statistique double donnée.

2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et vérifier qu'il y a une forte corrélation linéaire entre ces deux variables.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.

4) Quelle prévision (en litres) sur sa consommation de pétrole peut faire la famille considérée, si une vague de froid persiste pendant 48 heures avec une température moyenne extérieure de -4°.

Voir suite au verso →

PROBLEME (10 points)

I - Soit f la fonction définie sur [0, 1] par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x \operatorname{Log} x}{1+x^2} & \text{si } x \in \,]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On se propose dans cette partie de faire l'étude de f et de tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (on prendra 6 cm pour unité de longueur).

1) Soit φ la fonction définie sur] 0, 1 [par $\varphi(x) = \operatorname{Log} x + \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

a - Etudier les variations de φ et préciser ses limites en 0 et en 1.

b - Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \,]0, 1[$ et que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{3}$.

c - Donner le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in \,]0, 1[$.

2) a - Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

b - Calculer f '(x) pour $x \in \,]0, 1]$ et montrer que :

pour tout $x \in \,]0,1[$ on a $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \, \varphi(x)$.

c) Donner le tableau de variation de f et construire la courbe (C) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 .

II - On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de l'aire de la partie E du plan délimitée par la courbe (C) et l'axe (x'x) . Pour cela on est conduit à chercher une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} g_n(t) = -t^n \operatorname{Log} t & \text{si } t > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

a - Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, g_n est intégrable sur [0, 1].

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt$

b - Soit G_n la fonction définie sur [0, 1] par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1}\operatorname{Log} t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} & \text{si } t \in]0, 1]. \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0, 1] ; en déduire u_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et t un réel quelconque.

a - Montrer que pour tout réel t, on a :

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 + \dots\dots\dots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+3}}{1+t^2}$$

b - Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$f(t) = g_1(t) - g_3(t) + g_5(t) + \dots\dots\dots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t).$$

(f désigne la fonction définie dans la partie I).

c - En déduire que :

$$I = u_1 - u_3 + u_5 + \dots\dots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}\, dt.$$

3) On pose $S_n = u_1 - u_3 + \dots\dots + (-1)^n u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|I - S_n| \leqslant u_{2n+3}$

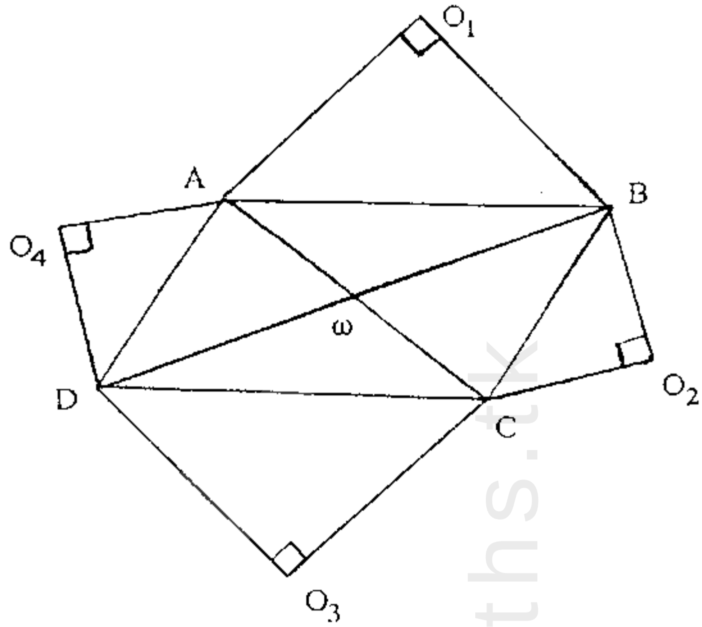
b - En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$

c - Déterminer un entier n_0 tel que $|I - S_{n_0}| \leqslant 10^{-2}$

En déduire une valeur approchée, à 10^{-2} près, de I et une valeur approchée, à 10^{-2} près, de l'aire de la partie E .

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 1996	**SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures —— Coef. : 4**

EXERCICE N°1 (6 points)



Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1) a - Déterminer $(R_2 o R_1)(A)$; $(R_3 o R_2)(B)$ et $(R_4 o R_3)(C)$.

b - Montrer que les applications $R_2 o R_1$, $R_3 o R_2$, $R_4 o R_3$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f.

2) a - Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b - Montrer que $f(O_2) = O_4$.

c - Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2 o S_\Delta$

a - Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$

b - Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c - Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE N°2 (4 points)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Deux boules sont blanches e portent respectivement les nombres 1 et 2, les deux autres boules sont noires et porten respectivement les nombres 1 et 2.

Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante : on tire une première boule

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule.
- Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire une deuxième boule.

1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

a - Donner la loi de probabilité de X.

b - Calculer son espérance mathématique.

2) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues . Donner la loi de probabilité de Y.

PROBLEME (10 points)

A - Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a - Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : $0 < \alpha < 1$ et $f(\alpha) = 0$

b - En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \geqslant \alpha$.

3) Soit un réel λ tel que $\alpha \leqslant \lambda$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$.

a - Calculer $A(\lambda)$

b - Trouver la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

B - Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1) Démontrer, en utilisant les variations de la fonction f, que :

$$\mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}\, n \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \qquad (1)$$

et en déduire que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}$

2) Démontrer alors que : $u_{n+1} \leqslant u_n \; e^{-\frac{1}{4n}}$

et en déduire que : $u_{n+1} \leqslant u_1 \; e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

3) Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie B du problème, que : $\mathrm{Log}(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

et en déduire que : $u_{n+1} \leqslant u_1 e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Log}(n+1)}$

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

*****

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 1996

SECTION : MATHEMATIQUES	SESSION DE CONTROLE
EPREUVE : MATHEMATIQUES	
DUREE : 4 heures — Coef. : 4	

EXERCICE N°1 (6 points)

Soient dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts.
Soit (C) un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB). Les autres tangentes à (C) issues de A et de B se coupent en M.
On pose OA = a , OB = b et on suppose que a > b.
Le candidat fera une figure pour chacune des trois questions suivantes :

1) On suppose dans cette question que O appartient au segment [AB]
   a - Montrer que la différence MA - MB est constante.
   b - En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.
   c - Déterminer la tangente en M à cette hyperbole.
2) On suppose dans cette question que O n'appartient pas au segment [AB]
   a - Montrer que la somme MA + MB est constante.
   b - En déduire que le point M varie sur une ellipse dont on précisera les foyers et les sommets du grand axe.
   c - Déterminer la tangente en M à cette ellipse.
3) Soit Δ la tangente à (C) parallèle à (AB), l'autre tangente à (C) issue de A coupe Δ en un point N. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O et par (d) la perpendiculaire à (AB) passant par A'.
   a - Montrer que le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.
   b - Déterminer la tangente en M à cette parabole.

EXERCICE N°2 (4 points)

1) Soit l'équation :

$$(E) : z^3 - 2(3 + i) z^2 + (8 + 9i) z + 3 - 9i = 0$$

   a - Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle α que l'on déterminera, et calculer les deux autres racines z_1 et z_2 avec $|z_1| > |z_2|$.

   b - On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives α, z_1, z_2 dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
   Montrer que le quadrilatère OABC est un rectangle.

2) Soit l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \text{ avec } z' = (1 + i) z - 3i$$

   a - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b - Soient O', B', C' les images respectives de O, B, C par f.
   Quelle est la nature du quadrilatère O'A B'C' ?

PROBLEME (10 points)

A - Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = (x - 1)^n \operatorname{Log} x$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On pose, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x) = n \operatorname{Log} x + 1 - \frac{1}{x}$

a - Etudier les variations de φ_n .

b - Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2) a - Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b - Tracer, dans le même repère R, les courbes (C_1) et (C_2) en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2).

B - Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$.

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad (n+1)\,u_n = \operatorname{Log} 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

En déduire

a - la relation : $\frac{1}{2(n+2)} \leqslant \operatorname{Log} 2 - (n+1)\,u_n \leqslant \frac{1}{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b - la limite de $(n + 1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$.

$$S_n(x) = 1 - (x - 1) + \dots + (-1)^n (x - 1)^n$$

a - Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b - En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour n élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\operatorname{Log} 2 - v_n = (-1)^{n+1} \left[\operatorname{Log} 2 - (n+1)\,u_n \right]$$

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ***** **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 1997	**SECTION : MATHEMATIQUES**
	EPREUVE : MATHEMATIQUES
	DUREE : 4 heures —— Coef. : 4

EXERCICE N° 1 (6 points)

Soit une droite fixe D et un point fixe A n'appartenant pas à la droite D. On construit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et tangent à la droite D.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite D et F un point variable sur $(\mathscr{C}) - \{H\}$.
   a - Vérifier que le point F est le foyer d'une parabole P ayant pour directrice la droite D et passant par le point A.
   b - Préciser le point F_o foyer de la parabole P qui admet A pour sommet.
2) On désigne par $\mathcal{F}$ la famille des paraboles de directrice commune D et passant par A.
   Soit P et P' deux paraboles de la famille $\mathcal{F}$ de foyers respectifs F et F'.
   a - Montrer que si F et F' sont diamétralement opposés sur le cercle $(\mathscr{C})$ alors les tangentes en A à P et P' sont perpendiculaires.
   b - Etudier la réciproque.
3) On fait varier le point F sur $\mathscr{C} - \{H, F_o\}$ et on désigne par B le deuxième point d'intersection de la parabole P de foyer F et de directrice D avec la droite (FA).
   a - Montrer que le point B varie sur une parabole (Γ) dont on précisera le foyer et la directrice.
   b - Montrer que les paraboles P et (Γ) ont même tangente en B.

EXERCICE N° 2 (4 points)

Dans l'espace orienté, on considère un carré ABCD et on désigne par E le milieu de [AB], par F celui de [CD] et par E' un point, distinct de E, tel que (EE') soit perpendiculaire au plan P du carré ABCD.

Soit O le milieu de [E'F].

1) On note Q le plan (EE'F) et on pose :
   $f = S_Q \circ S_P$ où S_Q est la réflexion de plan Q et S_P la réflexion de plan P.
   Préciser la nature de f et la caractériser.
2) Soit Δ la droite passant par le point O et parallèle à la droite (EF) et g le demi-tour d'axe Δ.
   Déterminer le plan P' tel que : $g = S_{P'} \circ S_Q$.
   où $S_{P'}$ est la reflexion de plan P'.
3) Soit $h = g \circ f$
   Préciser la nature de l'application h et la caractériser.

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème, P désigne un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

On pose : $D =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$ et $D^* =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

A - Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in D^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a - Montrer que f est continue à droite en 0.

b - Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a - Montrer que f est dérivable sur D^* et calculer $f'(x)$ pour $x \in D^*$.

b - Etudier les variations de la fonction f' sur D^*. En déduire que $f'(x) > 0$ pour tout x de D^*.

c - Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan P.

3) Soit α un nombre réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$

a - Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 1$.

b - Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

B - Soit Δ la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1) Tracer, dans le plan P, la courbe (C') déduite de la courbe (C) par la symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ.

2) Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan P.

a - Montrer que $M' = S_\Delta(M)$ si et seulement si $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

b - Soit $x \in D^*$ et M (x,y) un point du plan P. Vérifier que $-x-1 \in D^*$ et montrer que M est un point de (C') si et seulement si $y = f(-x-1)$.

c - On désigne par g la fonction admettant (C') comme courbe représentative. Montrer que pour tout x de D^* on a :

$$g(x) = (x+1) \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

C - 1) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(n) < 1 < g(n)$

2) Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

a - Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.

b - Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n - u_n < \dfrac{e}{n}$.

c - Déduire des questions précédentes la limite de u_n puis celle de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ..... **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 1997	SECTION : MATHEMATIQUES	SESSION DE CONTROLE
	EPREUVE : MATHEMATIQUES	
	DUREE : 4 heures — Coef. : 4	

EXERCICE N° 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x\, e^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1) a - Dresser le tableau de variation de f.
   b - Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
   c - Tracer (C).
   d - Montrer que, pour tout réel x de [0,1], on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.

2) On pose, pour tout n de IN* ,

$$I_n = \frac{1}{n!\, 2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx \qquad \text{et}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,2^n}$$

a - Donner la valeur de I_1 et montrer que, pour tout n de IN*, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!\ 2^{n+1}}$$

b - Démontrer, par récurrence, que pour tout n de IN*, on a :

$$u_n = \sqrt{e} - I_n$$

c - Montrer que, pour tout n de IN*, on a :

$$0 \leq I_n < \frac{1}{n(n!)\, 2^{n+1}}$$

d - En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Voir suite au verso →

EXERCICE N° 2 (4 points)

On considère une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'avoir " Face " soit égale à $\frac{2}{5}$.

1) On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.
   a - Calculer la probabilité d'avoir deux fois " Pile ".
   b - Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Face " .
   c - Calculer la probabilité d'avoir exactement une fois " Face ".

2) On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.
   L'urne U_1 contient quatre boules blanches et deux boules noires.
   L'urne U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires.
   L'urne U_3 contient deux boules blanches et quatre boules noires .
   Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
   On considère l'épreuve (E) suivante :
   On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.
   Si on obtient deux fois " Pile ", on tire simultanément trois boules de l'urne U_1.
   Si on obtient " Pile et Face ", on tire simultanément trois boules de l'urne U_2.
   Si on obtient deux fois " Face ", on tire simultanément trois boules de l'urne U_3.
   a - Soit A l'événement " Les trois boules tirées sont blanches ". Calculer la probabilité de A.
   b - On repète l'épreuve (E) cinq fois de suite et on désigne par X l'aléa numérique prenant pour valeurs le nombre d'épreuves donnant trois boules blanches.
   Calculer la probabilité de l'événement " $X = 2$ " puis calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME (10 points)

I - Soit m un nombre complexe.

1) On pose : $P(m) = -4m^2 - 4m(1 - 4i) + 15 + 8i$.
   Montrer que $P(m) = (2im + i + 4)^2$.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :
   $$(E) : z^2 - (2m + 5i)z + 2m^2 + (1 + i)m - 2(5 + i) = 0$$
   où m est un paramètre appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   a - Déterminer les deux solutions de l'équation (E).
   b - Calculer m pour que m soit lui-même solution de l'équation (E).

II - Dans la suite, on considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan d'affixe un nombre complexe m.

On désigne :

- par S la similitude directe qui, au point M, associe le point Q d'affixe $Z = (1 + i)m + 2 + 3i$.
- par S' la similitude directe qui, au point M, associe le point Q' d'affixe $Z' = (1 - i)m - 2 + 2i$.

1) Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S et S'.

2) Montrer que S'o S est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.

3) Montrer que l'application f qui envoie Q sur Q' est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.

4) Soit I le milieu de [QQ'].
On pose $I = t(M)$.
   a - Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.
   b - Montrer que si Q est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (QQ') sont perpendiculaires.

5) a - On donne un point M du plan. Déduire, de ce qui précède, une méthode pour construire simplement les points Q et Q' tels que :
   $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$
   b - On donne un point Q du plan.
   Construire les points M et Q' tels que :
   $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$.

6) Soit M un point du plan et $Q = S(M)$, $Q' = S'(M)$.
   a - Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les points M, Q et Q' soient alignés.
   b - En déduire, dans le cas précédent, l'ensemble des points Q et celui des points Q'. Construire ces deux ensembles.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 1998

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures — Coef. : 4

EXERCICE N°1 (5 points)

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})} \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi].$$

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI)

1) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

a - Montrer que Ω est le centre de cette rotation .

b - Soit C = R(B) . Montrer que I est le milieu du segment [AC] .

2) A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de [IC] tel que AM = IM'.
Montrer que le triangle Ω MM' est équilatéral .

3) Soit G le centre de gravité du triangle ΩMM' et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.

a - Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.

b - Montrer que S(B) = I et construire le point A' = S(A).

c - Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

EXERCICE N°2 (5 points)

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation :

$$z^2 - (2u - i\,\overline{u})z - 2iu.\overline{u} = 0$$

$\overline{u}$ étant le nombre complexe conjugué de u .

1) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E_u).
On désignera par z' et z" les solutions de cette équation.

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$) et on désigne par A, M, M' et M" les points d'affixes respectives 2i, u, z' et z" .
Soit ($\mathcal{H}$) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M" soient alignés.

a - Trouver une équation cartésienne de ($\mathcal{H}$) .

b - Montrer que l'ensemble ($\mathcal{H}$) est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

c - Vérifier que ($\mathcal{H}$) passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à ($\mathcal{H}$) en O .

d - Tracer ($\mathcal{H}$) .

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \text{Log}\,(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

A - 1) a - Montrer que la fonction f est impaire.

b - Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a - Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b - Trouver une équation cartésienne de la tangente Δ à (C) en O.

c - Préciser la position de Δ par rapport à (C).

d - Tracer la droite Δ et la courbe (C).

3) Soit a un réel strictement positif ; calculer en fonction de a, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$.

B - 1) a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on précisera.

b - Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C') représentative de g .

c - Montrer que, pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \dfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

2) a - Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet, dans $\mathbb{R}_+^*$, une seule solution α et que $\alpha > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b - Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}$, du domaine limité par les deux courbes (C) et (C') et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

C - On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

1) a - Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b - On pose $h = \varphi^{-1}$. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$ pour tout $x \in J$.

2) On pose, pour tout $x \in [0,1[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\dots\dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

a - Montrer que $S_n(x) = h(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$.

b - En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(2n-1)\,3^{2n-1}}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 1998

SECTION : MATHEMATIQUES	SESSION DE CONTROLE
EPREUVE : MATHEMATIQUES	
DUREE : 4 heures — Coef. : 4	

EXERCICE N°1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonorm $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a - Dresser le tableau de variation de la fonction f .

b - Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques Δ et Δ' dont on détermine des équations cartésiennes .

c - Tracer Δ, Δ' et (C) .

2) Soit Ω le point de coordonnées (2, 0) .

a - Trouver une équation cartésienne de la courbe (C) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

b - En déduire que, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la représentatio graphique de la fonction g définie sur IR par $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

3) Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{u(x)} g(t)\,dt$ où $u(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

a - Résoudre dans IR , l'équation : $u(x) = 1$

b - Montrer que la fonction F est dérivable sur IR et que, pour tout x de IR, on a :

$$F'(x) = \frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x} + 2\right)$$

c - Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équatio respectives $x = 2$, $x = 3$ et $y = 0$ relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE N°2 (4 points)

1) a - On lance un dé truqué dont les faces sont respectivement numérotées de 1 à 6.
Sachant que la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numér ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour chac des numéros de 1 à 5 .

b - On lance aussi une pièce de monnaie truquée.
Sachant que la probabilité d'apparition de la face " Pile " est $\frac{2}{5}$, calculer la probabili d'apparition de l'autre face .

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par X l'aléa numérique défini comme suit :

- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro impair du dé alors $X = 0$
- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro pair du dé alors $X = 1$
- Si la face " Face " apparaît alors X prend pour valeur le numéro apparu sur le dé.

Déterminer la loi de probabilité de X .

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient $X \geq 5$.

a - Calculer $P(Y = 2)$.

b - Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance .

PROBLEME (10 points)

Soit dans le plan orienté, un losange ABCD tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB \geq 6$ (en cm).

Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [AD] et [AC] .

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD .

I - 1) Soit $f = S_{DA} \circ R$ (S_{DA} étant la symétrie orthogonale d'axe (DA)) .

a - Déterminer la droite Δ telle que $R = S_{DA} \circ S_{\Delta}$.

b - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = R \circ S_{BC}$

a - Déterminer g(B) et g(C) .

b - Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

c - Déterminer la nature de g et donner sa forme réduite .

3) On désigne par h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $S = R \circ h$.

Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCD et DKL .

Soit E le point diamétralement opposé à D dans le cercle $(\mathscr{C})$.

a - Déterminer S(B), S(C) et S(E) .

b - Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

c - Montrer que $(\mathscr{C}')$ est le cercle de diamètre [DO'] .

II - On désigne par (Γ) l'ellipse passant par I et de foyers D et B et par (Γ') l'ellipse passant par I et de foyers D et A.

Soit B' le point de la demi-droite [O'I) tel que $IB' = IB$.

1) a - Montrer que le réel DB' est le grand axe pour chacune des ellipses (Γ) et (Γ') .

b - Construire les sommets de (Γ) et (Γ') et tracer ces deux courbes .

2) Montrer que si M est un point de (Γ) alors $R(M)$ est un point de (Γ') .

3) a - Montrer que si M est un point commun à (Γ) et (Γ') alors M appartient à la droite (DI)

b - Construire alors le deuxième point, I', d'intersection de (Γ) et (Γ') .

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2000

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES — Durée : 4h — Coefficient : 4

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = (\text{Log } x)^n$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ et calculer $f'_n(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.
   b) Déterminer, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et la limite de f_n à droite en 0.

2) a) Déterminer les positions relatives des deux courbes (C_2) et (C_3) .
   b) Construire (C_2) et (C_3) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) On pose $I_n = \int_1^e (\text{Log } x)^n \, dx$
   a) Montrer que $I_2 = e - 2$
   b) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $I_{n+1} + (n+1) I_n = e$
   c) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_2) et (C_3) .

4) a) Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs et qu'elle est décroissante .
   b) Déduire de la question 3) b) que :
   $$\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^3 + 2(1 - i) z^2 + (1 + m^2 - 4i) z - 2i(1 + m^2) = 0$$

ou m est un paramètre réel .

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .
   b) Calculer en fonction de m les deux autres racines .

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M' et M" d'affixes respectives $2i$, $-2-2i$, $-1-im$ et $-1+im$.
a) Montrer que AM'BM" est un parallélogramme.
b) Déterminer m pour que AM'BM" soit un rectangle.

PROBLEME : (10 points)

Le candidat doit utiliser et compléter la figure ci-contre et la remettre avec la copie.

Dans ce problème le plan est orienté et ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, la lettre O désigne le centre du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle.

Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient : CP = BQ = BC.

1) a) Montrer que (CI) est la médiatrice de [PB] et que (BI) est la médiatrice de [CQ].
b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$,

2) Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.
a) Montrer que f a pour centre I et que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de son angle.
b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$,
c) Montrer que les points I, P et Q sont alignés. (On pourra calculer $(\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}})$)

3) On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$.
a) Montrer que $f(O_2) = O$
b) En déduire que le triangle $O\,O_1\,O_2$ est équilatéral et que (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g = f \circ r \circ f$.
a) Montrer que g est une translation.
Vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de translation
b) Montrer que r (B) = C. En déduire que g(P) = Q.
c) Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

5) Soit s la similitude directe de centre O et qui transforme I en O_1.
a) Montrer que $\sqrt{3}$ est le rapport de s et que $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ est une mesure de son angle.
b) Montrer que pour tout point M du plan distinct de O, d'image M' par s, le triangle OMM' est isocèle de sommet principal M. (On pourra utiliser les relations d'El Kashi).
c) Construire les points B' et C' images respectives de B et C par s.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2001

SESSION PRINCIPALE

Section : MATHEMATIQUES

Epreuve : MATHEMATIQUES **Durée : 4 heures** **Coefficient : 4**

Il sera donné une grande importance à la rédaction et à la présentation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de $\mathscr{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-a}{z-1}$.

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation
$$E : z^2 - 2z + a = 0 .$$

2) a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation E .

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E .

3) Dans cette question on suppose que $a = -1$.
Soit M un point de $\mathscr{P} \setminus \{B\}$ d'affixe z et M' le point d'affixe z'= f(z) .

a) Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}) \equiv 0 \,(2\pi)$.

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B .

EXERCICE 2 (5 points)

Soient F et H deux points distincts , Δ la médiatrice de [FH] et J le milieu de [FH] .

Soit M un point de Δ et D la droite passant par H et perpendiculaire à la droite (MH). On désigne par P la parabole de foyer F et de directrice D.

1) a) Montrer que Δ est la tangente à P au point M.

b) Vérifier que les droites D et Δ sont parallèles si et seulement si M = J .

2) Dans le cas où le point M est différent de J, la droite D coupe Δ en I . Soit E le symétrique de H par rapport à I et Δ' la perpendiculaire à Δ en I .

a) Montrer que Δ' est tangente à la parabole P .

b) Construire le point de contact N de la parabole P et de la droite Δ' et montrer que les points M, F et N sont alignés .

3) a) Soit S le sommet de la parabole P. Montrer que le point J appartient à la tangente au sommet à la parabole P et déduire que S appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [FJ] .

b) Soit R un point de $\mathscr{C}$ distinct de F . Montrer que la parabole de foyer F et de sommet R est tangente à Δ en un point que l'on déterminera (Il est conseillé de faire une figure séparée pour cette question) .

c) Déterminer alors l'ensemble des points S quand le point M varie sur Δ .

PROBLEME (10 points)

I) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de la fonction f .

En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) On considère la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \text{Log}(\text{tg}\, x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$ pour x appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $h(0)$.

c) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$, $2h'(x) = f(x)$.

En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)\,dt = 2\,h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II) Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_0^x f^n(t)\,dt \ .$$

1) a) Calculer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Soit K la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $K(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. Montrer que $K'(t) = f^2(t)$.

Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$.

2) a) Montrer que l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par F_n est l'intervalle $[0, \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)[$.

b) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a $f(t) < 2\,e^{-t}$

En déduire, en utilisant **I** - 1) a), que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie .

c) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$.

Montrer alors que pour tout réel x positif , on a $\dfrac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$

et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ est non nulle .

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

a) Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2 .

b) En remarquant que $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, +\infty[$ on a $f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

SESSION PRINCIPALE

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2002

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE N°1 (6 points)

Dans un plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AC] et par K le milieu de [AB].

1) a – Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(B) = A et f(A) = C .

b – Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

c – Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que f(C) = D .

d – Soit D' = f(D). Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à C.

2) Soit g la similitude directe telle que g (A) = B et g (I) = D .

a – Déterminer le rapport et l'angle de g .

b – Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [ID]. Montrer que $\mathscr{C}$ passe par I et que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en un deuxième point Ω .

c – En déduire que Ω est le centre de g .

3) Soit σ = f o g.

Déterminer la nature de σ et ses éléments caractéristiques .

EXERCICE N°2 (4 points)

Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.

1) On tire une boule . Calculer la probabilité p_1 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

2) On tire successivement, et sans remise, deux boules. Calculer la probabilité p_2 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

3) On tire simultanément deux boules de l'urne.

On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - 2\,\text{Log}\,x - 1$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

I – 1) a – Etudier les variations de la fonction f.

b – Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit λ un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \lambda$, $x = 1$ et $y = 0$.

a – Calculer $A(\lambda)$.

b – Déduire que $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \frac{4}{3}$

II – 1) Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$

a – Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b – En déduire que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant A\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2) On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a – Montrer que $A\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right)$.

b – En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{4}{3}$.

3) a – Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

b – Montrer que $S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\,\text{Log}\,\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}$.

c – En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

SESSION DE CONTROLE

REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2002

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE N°1 (5 points) .

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \text{Log}(x+2)$.

1) a – Dresser le tableau de variation de f.

   b – Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit m un réel de l'intervalle $]-2, -1]$ et A_m l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = m$ et $x = -1$.

   a – Montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{m} \frac{x}{x+2}\,dx = m + 1 - 2\,\text{Log}(m+2)$.

   b – Calculer A_m en fonction de m .

   c – Calculer $\displaystyle\lim_{m \to -2} A_m$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ une solution unique notée α .
   Vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

4) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

   a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n > \alpha$.

   b – Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

   c – Déduire que la suite (U_n) est convergente. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N° 2 (5 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et (-1) et on désigne par P' le plan P privé du point A.

Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M de P' d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que $z' = \dfrac{z(\bar{z} - 1)}{z - 1}$.

1) a – Soit C le point d'affixe i . Déterminer le point f(C) .

b – Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{C} \setminus \{A\}$

on a f(M) = B .

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle $\mathscr{C}$.

On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f .

a – On désigne par $Z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $Z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectifs des vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$.

Montrer que $\dfrac{Z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{Z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c – En déduire une construction géométrique du point M' .

PROBLEME (10 points)

On donne dans un plan orienté, un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O, de rayon R et un point F, distinct de O, tel que OF < R.

Soit M un point de ($\mathscr{C}$). On désigne par P le symétrique de M par rapport à F.

I – 1) Déterminer l'ensemble des points P lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$) .

2) Soit N le point tel que MP = MN et $\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit ω le milieu de [NP] .

a – Montrer que ω est l'image de M par une rotation de centre F dont on précisera l'angle.
b – En déduire l'ensemble des points ω lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$) .

3) Soit I le milieu de [MN] .
Montrer que I est l'image de M par une similitude directe de centre F dont on déterminera le rapport et l'angle.

4) a – Calculer tg $\widehat{MFN}$.

b – Soit α une mesure de l'angle $(\widehat{\overline{FM}, \overline{FN}})$ tel que $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Déterminer tg α et déduire

que α reste constante lorsque M varie sur le cercle ($\mathscr{C}$) .

c – Montrer que N est l'image de M par une similitude directe de centre F dont on déterminera le rapport et l'angle.

d – Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$) .

II – 1) Soit G le symétrique de F par rapport à la droite (MN) et F' le symétrique de F par rapport à O.
Montrer que G appartient au cercle ($\mathscr{C}'$) de centre F' et de rayon 2R.

2) Soit ($\mathscr{E}$) l'ellipse de foyers F et F' et de cercle principal ($\mathscr{C}$) .

a – Montrer que la droite (MN) reste tangente à l'ellipse ($\mathscr{E}$) lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$).

b – Construire le point de contact T de ($\mathscr{E}$) et de la droite (MN) .

c – Déterminer les positions du point M sur le cercle ($\mathscr{C}$) pour lesquelles (MN) est tangente à l'ellipse ($\mathscr{E}$) en l'un de ses sommets.

République Tunisienne
Ministère de l'Education
et de la Formation

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2003

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

3

XERCICE 1 : (5 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$E_d : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$$

ı d est un nombre complexe donné de module 2 .

a – Vérifier que 2i est une solution de E_d .
b – Résoudre alors l'équation E_d.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, M, N d'affixes respectives 2i ; - i ; - i + d ; - i – d.
a – Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].
b – En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.
c – Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.
d – En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

XERCICE 2 : (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$.
On désigne par I le milieu du segment [C D].

a – Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f (C) = A.
b – Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

Soit g = f o r
a – Montrer que g est une translation
b – soit F = g(E).
Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.
c – Montrer que les points C, A et F sont alignés.

Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
a – Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.
b – Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

ROBLEME : (10 points)

– 1) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$h(x) = x - \text{Log}\, x$$
a – Etudier les variations de h .
b – En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $h(x) \geqslant 1$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x - \text{Log}\, x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a – Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
b – La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II – Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1) a – Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$

b – Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $F'(x) = \dfrac{\text{Log}2 - \text{Log}x}{h(2x)\ h(x)}$ et que $F'(0) = 0$.

2) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \text{Log}\,2$.

3) Montrer que pour tout x de $[1, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant F(x) - \text{Log}\,2 \leqslant \frac{\text{Log}\,2x}{x - \text{Log}\,x}$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4) a – Montrer que : $F\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \text{Log}\,2$.

b – Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2}, 1]$ tel que $F(\alpha) = \text{Log}\,2$.

5) a – Dresser le tableau de variations de F .

b – Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On donne : $F(1) \simeq 0{,}9$, $F(2) \simeq 1{,}1$)

III - Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul

1) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t - \text{Log}\,t}\,dt$$

a – Montrer que pour tout t de $]0, +\infty[$, $\dfrac{t}{t - \text{Log}\,t} \leqslant t$.

b – Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c – En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \frac{1}{2}$

2) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \int_1^n \frac{t}{t - \text{Log}\,t}\,dt$$

a – Montrer que pour tout t de $[1, +\infty[$, $\dfrac{t}{t - \text{Log}\,t} \leqslant 1 + \text{Log}\,t$.

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant n\,\text{Log}\,n$

b – Calculer $\displaystyle\int_1^n \left(1 + \frac{\text{Log}\,t}{t}\right)dt$ puis montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 5$,

$n \leqslant w_n \leqslant n\ \text{Log}\,n$.

c – En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION
❖❖❖

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2004

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

(Pour la figure, on prendra OA = 4 (en cm)).
La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1) a – Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
   b – En déduire que les points B, J et J' sont alignés.

2) Soit S la similitude directe telle que S(J) = O et S(O) = J'.
   a – Déterminer une mesure de l'angle de S.
   b – Montrer que le point B est le centre de la similitude S .
   c – Donner le rapport de la similitude S.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(J) = O et σ(O) = J'.
   a – Donner le rapport de σ .
   b – En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.
   c – Déterminer $\sigma \circ \sigma$ (J) et en déduire que le point Ω appartient à la droite (JJ').
   d – Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia .
   On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels .
   a – Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
   b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si | a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
   a – Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

$$1 - e^{ix} = -2\,i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

   b – En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.
   c – Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

PROBLEME (10 points)

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
   b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
   d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leqslant e^x$.
   b – En déduire que pour tout réel $x \geqslant -1$, on a $f_1(x) \leqslant e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.
   a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.
   b – Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 1$, on a $0 \leqslant S(\lambda) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-\frac{x}{n}}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx .$$

   a – Calculer I.
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{-\frac{1}{n}} - 1$.
   c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|\, e^{-\frac{x}{n}} - 1 \,| \leqslant e^{\frac{1}{n}} - 1$.
   d – Montrer que $|\, A_n - I \,| \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.
   e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
❖❖❖

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2004

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \text{Log}(x^2 - 2x + 2)$.
Soit ($\mathscr{C}$)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b – Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$).
c – Préciser la branche infinie de ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.
d – Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

2) Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+\text{tg}x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a – Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $F'(x) = 1$.

b – En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$.

3) a – A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 2\,\text{Log}\,2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}\,dx .$$

b – Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

c – Calculer, alors, l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites D : x = 1 et D' : x = 2.

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2 et trois boules rouges numérotées 1, 2, 2
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne.
a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Tirer deux boules de couleurs différentes ».
B « Tirer deux boules de même numéro ».

b – Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de boules rouges tirées au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

PROBLEME (10 points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

(pour la figure on prendra AB = BC = 6 (en cm)).

On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].

Soient I' le symétrique de O par rapport à (AB) et J' le symétrique de O par rapport à (BC).

Les demi-droites [OI) et [OJ) coupent le cercle de diamètre [AC] respectivement en A' et B'.

I – 1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Déterminer r(A) et r(B).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a – Montrer que : $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b – En déduire h(A') et h(B').

3) On désigne par S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

a – Montrer que : S = hor .

b – En déduire les éléments caractéristiques de S.

4) Soit P un point du plan distinct de O et soit P' = r(P). On désigne par Q le projeté orthogonal de P sur [OP'].

a – Montrer que le triangle OPQ est rectangle et isocèle.

b – Montrer alors que S(P) = Q.

c – Montrer que OBI'A est un carré. En déduire S(I').

d – Déterminer S(J').

II - Soit M un point de la droite (AB) tel que M ≠ B. (Pour la figure on prendra : M ∈ [BA) et BM = 8 (en cm)) .

Soit Δ la médiatrice de [OM].

1) On pose S(M) = N. Montrer que { N } = Δ ∩ (IJ) .

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite (I'J').

a – Vérifier que A et C sont deux points de $\mathscr{P}$ et préciser les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces deux points.

b – Montrer que lorsque le point M varie sur (AB) – {B}, la droite (MN) reste tangente à la parabole $\mathscr{P}$.

c – Construire le point de contact de (MN) et de ($\mathscr{P}$).