

## EXERCICE I

(4 points)

Dans le plan orienté  $(\mathcal{P})$ , on considère un triangle quelconque ABC. Soit  $C'$  le symétrique de B par rapport à A. Soit  $f$  l'application affine de  $(\mathcal{P})$  définie par  $f(A) = A$ ,  $f(B) = C$  et  $f(C) = C'$ .

1°)  $f$  est-elle une transformation affine de  $(\mathcal{P})$ ? Justifier votre réponse.

2°) Soit  $M$  un point quelconque de  $(\mathcal{P})$ ,  $Q$  le projeté de  $M$  sur la droite  $(AB)$  parallèlement à  $(AC)$ ,  $R$  le projeté de  $M$  sur la droite  $(AC)$  parallèlement à la droite  $(AB)$ .

- Démontrer que l'image  $Q'$  de  $Q$  par  $f$  est telle que  $(QQ')$  et  $(BC)$  sont deux droites parallèles.
- Préciser la position du point  $Q'$ . Construire  $Q'$ .
- Déterminer l'image de la droite  $(MQ)$  par  $f$ .
- Déterminer l'image  $R'$  de  $R$  par  $f$ ; construire  $R'$ .
- Déterminer l'image de la droite  $(MR)$  par  $f$ .
- Donner un programme de construction de l'image  $M'$  de  $M$  par  $f$ . Réaliser ce programme sur une figure.

- 3°) a) Préciser l'image  $C_1$  de  $C'$  par  $f$ .  
 b) Préciser la nature et les caractéristiques de l'application  $f \circ f$ .  
 c) Trouver la nature du triangle ABC pour que  $f$  soit une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

## EXERCICE II

(4 points)

Soit  $(E)$  l'équation donnée par:  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^3 - (2 + 9i)z^2 + (-22 + 12i)z + 18 + 12i = 0$$

1°) a) Montrer que l'équation  $(E)$  admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre l'équation  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$

2°) Le plan complexe  $(\mathcal{P})$  est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $A, B$  et  $C$  les points dont les affixes sont les solutions de  $(E)$ .

- Placer ces points.
- Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier votre réponse.

## PROBLEME

(12 points)

Dans tout le problème,  $(\mathcal{P})$  est un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$

## Partie A:

Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+x} - \ln |1+x|$$

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans  $(\mathcal{P})$ .

1°) a) Donner l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  et les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

b) Dresser le tableau des variations de  $f$ .

2°) Montrer que  $(C_f)$  coupe la droite des abscisses en deux points dont l'un a une abscisse non nulle notée  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $] -4,6; -4,5 [$ .

Note: On donne  $1,25 < \ln 3,5 < 1,26$  et  $1,28 < \ln 3,6 < 1,29$

## Partie B

Pour tout élément  $m$  de  $\mathbb{R}^*$  on définit les points  $I_m$  et  $J_m$  de  $(\mathcal{P})$  par

$$\overline{OI_m} = \frac{1}{m} \overline{OI} \quad \text{et} \quad \overline{OJ_m} = m \overline{OJ}$$

1°) Soit  $h_m$  la transformation affine de  $(\mathcal{P})$  définie par:

$$h_m(O) = O, \quad h_m(I) = I_m \quad \text{et} \quad h_m(J) = J_m.$$

a) Définir analytiquement  $h_m$  dans le repère  $(O, I, J)$

b) Donner un procédé de construction de l'image  $M_2$  d'un point quelconque  $M$  par  $h_m$ .

2°) On pose  $D_m = \mathbb{R}^* - \{-\frac{1}{m}\}$  et on considère la fonction  $g_m$  définie par:

$$\begin{cases} g_m(0) = m \\ \forall x \in D_m, \quad g_m(x) = \frac{\ln |1+mx|}{x} \end{cases}$$

On désigne par  $(\Gamma_m)$  la courbe représentative de  $g_m$  dans  $(\mathcal{P})$ .

a) Quelle transformation géométrique simple transforme  $(\Gamma_m)$  en  $(\Gamma_{-m})$ ?

b)  $h_m$  étant l'application affine définie en B 1°), démontrer que, pour tout  $m$  élément de  $\mathbb{R}^*$ ,  $(\Gamma_m)$  est l'image de  $(\Gamma_1)$  par  $h_m$ .

3°) a) Montrer que  $g_1$  est continue et dérivable en tout point de  $D_1 - \{0\}$ .

b) On admet qu'il existe une fonction numérique  $\varepsilon$  de la variable réelle  $x$  telle que:

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Montrer alors que  $g_1$  est continue et dérivable en 0.

c) Étudier les branches infinies de  $(\Gamma_1)$ .

d) Utiliser A pour étudier les variations de  $g_1$ .

e) Construire  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  et  $(\Gamma_{-2})$  sur une même figure.