BAC C GABON
session 93

EXERCICE I (5 points)

1°) Soit ABC un triangle non isocèle en A. On note d la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et d' sa bissectrice extérieure.
Soit M un point du plan distinct de A. Montrer que M est un point de d ou de d' si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right)=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

2°) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points d'intersection de la médiatrice de [BC] avec Γ appartient aux bissectrices d et d'.
3°) On pose AB = c, AC = b, BC = a.
Soit I barycentre de (B, b), (C, c)
J barycentre de (A, c), (B, b)
K barycentre de (A, b), (C, c)
H barycentre de (A, b + c), (B, b), (C, c)
a) Montrer que H est le milieu commun des segments [AI] et [JK].
b) Calculer en fonction de b et c les distances AJ et AK. En déduire que le quadrilatère AJIK est un losange.

EXERCICE II (4 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \bar{z} - 1$.
1°) Montrer que f = t o s, où s est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et t une translation dont on déterminera le vecteur.
2°) a) Donner l'expression analytique de f.
b) Montrer que f est une isométrie.
c) Expliquer pourquoi f n'est pas un déplacement.
3°) On considère l'application g = f o s' où s' est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
a) Montrer que g est l'application qui au point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' = - z + 1.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

PROBLEME (11 points)

Partie A:

1°) On considère la fonction f_n définie sur IR par :
$f_n(x) = (1 - x)^n e^x$, $n \in \mathbb{N}^*$
Etudier les variations de f_n pour n pair et puis pour n impair. Déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
Présenter les résultats dans deux tableaux.
2°) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.
b) On donne le tableau suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f_3(x)$	1	0,8057	0,6254	0,4630	0,3222	0,2061
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$f_3(x)$	0,1166	0,0544	0,0178	0,0025	0	

Construire sur [0 ; 1], la courbe (C_3) représentative de f_3 dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 10 cm.
c) En appliquant la méthode des rectangles aux intervalles $\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right]$, $0 \le k \le 9$, montrer que :

$$\frac{1}{10}\left[f_3(0,1)+f_3(0,2)+\ldots+f_3(1)\right]\le\int_0^1 f_3(x)\,dx\le\frac{1}{10}\left[f_3(0)+f_3(0,1)+\ldots+f_3(0,9)\right]$$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 f_3(x)\,dx$

Partie B:

Soit F_p la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F_p(x) = \int_0^x (1 - t)^{2p+1} e^t\,dt$, $p \in \mathbb{N}$.
1°) Montrer que pour tout réel $t \ge 1$, on a : $e^t(1 - t)^{2p+1} \le (1 - t)^{2p+1}$
En déduire les limites de $F_p(x)$ et de $\frac{1}{x}F_p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2°) Montrer que pour tout réel t de [0 ; 1], on a :
$(1 - t)^{2p+1} \le e^t(1 - t)^{2p+1} \le e(1 - t)^{2p+1}$.
En déduire un encadrement de $F_p(1)$ et ensuite de $F_1(1)$.
Comparer cet encadrement à celui obtenu dans la partie A.2.c).
3°) a) Calculer $F'_p(x)$ et dresser le tableau de variations de F_p.
b) Montrer qu'il existe un réel α_p unique, tel que $\alpha_p \ge 1$ et $F_p(\alpha_p) = 0$.
4°) Donner l'allure de la courbe représentative de F_1 définie sur + dans un nouveau repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. On prendra $F_1(1) = 0,3$ et $\alpha_1 = 1,7$.

Partie C:

1°) Soit (u_n), $n \ge 1$, la suite définie par :
$u_n = \int_0^1 (1 - t)^n e^t\,dt$.
a) Montrer que cette suite est positive.
b) Montrer que cette suite est décroisssante. Est-elle convergente ?
2°) Calculer la limite de cette suite.