BAC C GABON session 94

EXERCICE I (5 points)

Dans une urne il a n-1 boules blanches, n boules vertes, n+1 boules rouges. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3.

I- . On tire trois boules simultanément de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

Calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et vérifier qu'elle est indépendante de n.

II-. On suppose désormais que $n = 4$.

Un premier tirage simultanée de 3 boules ayant été effectué, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on tire une deuxième fois trois boules simultanément. On désigne par A_o, A_1, A_2, A_3 et B les événements suivants :

A_o : le premier tirage ne contient pas de boule verte.

A_1 : le premier tirage contient exactement une boule verte.

A_2 : le premier tirage contient exactement deux boules vertes.

A_3 : le premier tirage contient exactement trois boules vertes.

B : le deuxième tirage contient exactement deux boules vertes.

1°) Calculer les probabilités des événements A_o, A_1, A_2, A_3.

2°) Calculer $p(B/A_o)$, $p(B/A_1)$, $p(B/A_2)$, $p(B/A_3)$.

Remarque : $p(B/A_i)$ désigne la probabilité de B sachant que A_i est réalisé, avec i élément de $\{0, 1, 2, 3\}$.

3°) En déduire les probabilités des événements $B \cap A_o$, $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $B \cap A_3$.

4°) Calculer la probabilité de l'événement B.

EXERCICE II (5 points)

Soit un carré ABCD de centre O tel que AB = a et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1°) a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s, de centre O, qui transforme A en I.

b) Montrer que le quadrilatère IJKL est l'image par s du carré ABCD. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Calculer son aire.

2°) Soit A', B', C' et D' les isobarycentres des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

Démontrer que la quadrilatère A'B'C'D' est l'image du quadrilatère IJKL par une transformation simple que l'on précisera. En déduire la nature et l'aire du quadrilatère A'B'C'D'.

3°) On considère une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD. Les perpendiculaires au plan de base menées par A', B', C' et D' (définis au 2°) coupent les faces SAB, SBC, SCD et SDA respectivement en G_1, G_2, G_3 et G_4.

a) Démontrer que G_1, G_2, G_3 et G_4 sont les isobarycentres de ces faces.

b) Démontrer que le quadrilatère $G_1G_2G_3G_4$ est un carré. (On pourra démontrer qu'il est l'image du quadrilatère IJKL par une transformation simple de l'espace)

PROBLEME (10 points)

Pour tout entier n, on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$.

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique : 4 cm).

Partie A: (3,5 points)

1°) On suppose $n = 0$.

a) Etudier les limites de f_o en 0 et en $+\infty$.
En déduire les asymptotes à la courbe (C_o).

b) Etudier les sens de variations de f_o puis dresser son tableau de variaiton.

c) Tracer la courbe (C_o).

2°) On suppose $n \geq 1$.

a) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).
En déduire les coordonnées du point d'intersection, I , de (C_n) et (C_{n+1})

b) On considère la droite (D) d'équation x = 1 et M un point de (C_n) de coordonnées (x ; $f_n(x)$). La droite (OM) coupe (D) en N. Calculer l'ordonnée du point N en fonction de x et de $f_n(x)$.

c) Vérifier que le point M' de même abscisse que M et de même ordonnée que N est un point de (C_{n+1}).

d) Tracer la courbe (C_1) à partir de la courbe (C_o) en utilisant la construction précédente.

Partie B: (3 points)

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

1°) On considère la fonction F_n définie sur $[10 ; +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_{10}^{x} f_n(t)\, dt.$$

Justifier l'existence de $F_n(x)$.

2°) On pose $G_n(x) = e^{10} F_n(x)$, et on admet que la fonction G_n a une limite J_n quand x tend vers $+\infty$.

Démontrer que, pour tout n, et pour tout $x \in [10 ; +\infty[$:

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{10^{n+1}}.$$

En déduire un encadrement de J_n.

3°) A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout n, et pour tout x de $[10 ; +\infty[$,

$$G_n(x) = \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{e^{-x+10}}{x^{n+1}} - (n+1)G_{n+1}(x)$$

En déduire que $J_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{10^{n+1}} - J_n\right)$

Partie C : (3,5 points)

L'objet de cette partie est de déterminer une valeur approchée de J_o.

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_o = 0$ et de terme général u_n, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{10} - \frac{1!}{10^2} + \frac{2!}{10^3} - \frac{3!}{10^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{10^n}$$

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, :

$J_o - u_n = (-1)^n\, n!\, J_n$

On rappelle que $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$.

2°) a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$|J_o - u_n| \leq \frac{n!}{10^{n+1}}$$

b) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, q): $u_{2p} \leq J_o \leq u_{2q+1}$.

3°) On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par : $r_n = \frac{n!}{10^{n+1}}$

a) Etudier suivant les valeurs de n le signe de $r_{n+1} - r_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n : $r_9 \leq r_n$.

b) En utilisant 2a) de la partie C, donner un encadrement de J_o d'amplitude $2r_9$.

c) En remarquant que $u_{10} = u_9 - r_9$ et en utilisant 2b) de la partie C, donner un encadrement de J_o d'amplitude r_9, puis une valeur approchée de J_o à $\frac{r_9}{2}$ près.

On donne $u_9 = 0{,}09158192$ et $r_9 = 0{,}000036288$.