



EXERCICE I (5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Une urne contient des boules numérotées de 1 à $2n$. On y trouve :

- 1 boule portant le numéro 1
- 2 boules portant le numéro 2
- 2^2 boules portant le numéro 3
- 2^3 boules portant le numéro 4
- etc, et enfin :
- 2^{2n-1} boules portant le numéro $2n$.

Partie 1-

- 1°) On appelle N le nombre de boules contenues dans l'urne, montrer que $N = 4^n - 1$ et que c 'est un multiple de 3.
2°) On désigne par I le nombre de boules portant un numéro impair, et par P le nombre de boules portant un numéro pair.

a) Montrer que $I = \frac{4^n - 1}{3}$

- b) Exprimer alors I en fonction de N et montrer que

$$P = 2I = \frac{2N}{3}$$

Partie 2-

On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne et on désigne par X le nombre de boules tirées portant un numéro pair.

- 1°) Donner en fonction de N , la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
2°) Calculer son espérance mathématique et vérifier qu'elle ne dépend pas de N .

Partie 3-

On suppose maintenant que $100 \leq I \leq 1000$.

- 1°) Quel est le plus grand numéro porté par les boules.
2°) On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule porte un numéro supérieur ou égal à 8.

EXERCICE II (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, u, v) , d'unité graphique un centimètre. On désigne par f l'application qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 2z$.

- 1°) a) Déterminer les points du plan ayant pour image le point A d'affixe -4 .

b) Ecrire les affixes des points obtenus sous forme trigonométrique.

2°) On note (x, y) les coordonnées du point M et (x', y') celles de son image M' par f . Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

3°) a) Etablir que l'ensemble (H) des points M dont les images M' appartiennent à l'axe des ordonnées est une hyperbole dont on précisera les sommets, les axes, les foyers et les asymptotes.

b) Construire (H) avec soin.

4°) a) Etablir que l'image de l'axe des ordonnées par f est la parabole (Γ) d'équation $y^2 = -4x$.

b) Construire (Γ) avec soin.

PROBLEME (11 points)

Partie A:

- 1°) (E_0) désigne l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0) .
2°) (E) est l'équation différentielle $y'' + 2y' = y = 2e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

b) Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est une solution de (E_0) .

c) Déterminer toutes les solutions de (E)

d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

Partie B:

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique un centimètre.

1°) Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.

2°) En remarquant que f est solution de l'équation différentielle (E) , déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R}

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t) dt$).

3°) Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^n f(t) dt$.

a) Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation graphique.

b) Etudier la convergence de la suite (I_n) puis en déduire que le domaine plan illimité des points $M(x, y)$ où $0 \leq x$ et $0 \leq y \leq f(x)$, a une aire que l'on précisera.

Partie C:

On se propose d'étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{1}{n^3} \left[(1+2n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+2n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots + (n+2n)^2 e^{-\frac{n}{n}} \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

1°) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$$

2°) Etablir que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

3°) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a

$$u_n \leq \int_0^1 f(t) dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$$

4°) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a

$$I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$$

5°) Etudier alors la convergence de la suite u puis préciser sa limite.