

# BAC C GABON

## session 97

### EXERCICE I (5 points) [www.doualamaths.net](http://www.doualamaths.net)

Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et AEFG tels que:  $AB=AE=a$  et  $(\vec{AE}, \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3}$ .

Soit K le point tel que DAEK soit un parallélogramme : On appellera I son centre.

Utiliser la figure ci-jointe que l'on complètera au cours des questions.

#### Partie I :

En utilisant les isométries vectorielles, on veut montrer que  $AK=GB$  et que les droites (AK) et (GB) sont perpendiculaires et que le triangle FKC est rectangle isocèle en K.

On désigne par  $\rho$  la rotation vectorielle d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

1°) a) Démontrer que l'on a :  $\vec{AK} = \vec{AD} + \vec{GF}$ .

b) Démontrer que l'on a  $\rho(\vec{AD}) = \vec{AB}$  et  $\rho(\vec{GF}) = \vec{GA}$ . En déduire

alors que  $\rho(\vec{AK}) = \vec{GB}$ .

c) Que peut-on en conclure ?

2°) a) Démontrer que l'on a :  $\vec{KF} = \vec{DA} + \vec{EF}$ .

b) Démontrer que  $\rho(\vec{KF}) = \vec{CK}$  puis conclure.

#### Partie II :

Soit s la similitude directe qui transforme A en G et K en F.

1°) a) Démontrer que le triangle EAD est équilatéral et que EADK est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

2°) On cherche à construire son centre que l'on notera O.

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est l'ensemble (C) des points M tel que  $(\vec{MA}, \vec{MG}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$  ?

b) Soit P le barycentre du système de points pondérés  $\{(G, 3); (A, -1)\}$ .

Démontrer que l'ensemble (C') des points M du plan tels que

$\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  est le cercle de centre P et de rayon  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire la construction du point O.

### EXERCICE II (4 points)

Soit  $(y_n)_{n \geq 0}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} - y_n = n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1°) Exprimer, pour tout entier naturel n,  $y_n$  en fonction de n.

2°) Dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité 1 cm, on considère les points  $M_n(n, y_n)_{n \geq 0}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n,  $M_n$  appartient à la conique (P) d'équation  $x^2 - 2y = 0$ .

b) Tracer (P) en précisant sa nature et ses éléments caractéristiques (foyer, directrice)

3°) On considère les points A, B, C de (P) d'abscisses respectives a, b et c (a, b et c sont des réels non nuls et deux à deux distincts) et G le centre de gravité du triangle ABC.

On désigne par  $(T_A), (T_B), (T_C)$  les tangentes à (P) respectivement en A, B, C.

La perpendiculaire en A à  $(T_A)$  s'appelle la normale en A à (P); on la notera  $(N_A)$ .

a) Montrer qu'une équation de  $(N_A)$  s'écrit :  $y - 1 = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2$

b) Déterminer l'abscisse  $x_1$  du point d'intersection des normales  $(N_A)$  et  $(N_B)$  puis l'abscisse  $x_2$  du point d'intersection des normales  $(N_B)$  et  $(N_C)$ .

c) En déduire que si les normales  $(N_A), (N_B)$  et  $(N_C)$  sont concourantes alors G appartient à l'axe focal de (P).

### PROBLEME (11 points)

Pour tout entier naturel n, on note  $f_n$  la fonction définie sur IR par :

$$f_0(x) = e^x \text{ et si } n \text{ est non nul, } f_n(x) = \frac{(1-x)^n e^x}{n!}$$

On désigne par  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  l'unité graphique étant 2 cm.

Le problème a pour but d'étudier, suivant la parité de n, le comportement des fonctions  $f_n$ , de construire deux courbes particulières afin d'obtenir, à partir de suites définies à l'aide de ces fonctions  $f_n$ , des limites remarquables.

#### Partie A :

I Variations de la fonction  $f_n$  pour  $n \geq 1$ .

1°) Déterminer, suivant la parité de n, les limites de  $f_n$  lorsque x tend vers  $(+\infty)$ . (Pour la première de ces limites, on pourra se ramener à une limite connue en posant  $X = 1 - x$ .)

2°) Etudier, suivant la parité de n, le sens de variation de  $f_n$  et dresser les tableaux de variations correspondants.

3°) Etudier, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

#### II Tracé de courbes et calcul d'aire.

1°) a) Dresser les tableaux de variations de  $f_1$  et  $f_2$ .

b) Préciser les positions relatives des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et les construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2°) Vérifier que pour tout réel x on a :  $f_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$ .

En déduire, en cm<sup>2</sup>, l'aire du domaine plan limité par ces deux courbes et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = -1$ .

#### Partie B: Etude d'une suite et calcul de limites

Soit a un réel fixé tel que :  $0 \leq a \leq 1$  et soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :

$$U_n = \int_a^1 f_n(x) dx$$

1°) Calculer  $U_0$ .

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq U_n \leq \frac{(1-a)^n}{(n+1)!} U_0, \text{ et en déduire que la suite } (U_n)_{n \geq 0} \text{ converge vers } 0$$

3°) a) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que pour  $n \geq 0$ ,

$$\text{on a } U_{n+1} = U_n - \frac{(1-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

b) En déduire que pour  $n \geq 0$  on a :

$$U_n = e^{-a} \left[ \frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!} \right]$$

4°) Pour  $n \geq 0$  on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(1-a)^k}{k!} = \frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!}$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{1-a}$ .

5°) Pour  $n \geq 0$  on pose

$$A_n = \frac{1}{2^0 \times 0!} + \frac{1}{2^1 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{2^n \times n!}$$

$$\text{et } B_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \sqrt{e}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = e$

#### Partie C: Une autre suite et calcul d'autres limites.

Pour tout entier naturel n on pose  $V_n = \int_1^2 f_n(x) dx$ .

1°) a) Montrer que  $V_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^x dx$

b) Etablir que  $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$  et en déduire que  $|V_n| \leq \frac{e^2}{n!}$  pour tout entier naturel n.

c) Déterminer alors la limite de la suite  $(V_n)_{n \geq 0}$ .

2°) a) Démontrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $f'_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ .

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a :  $f_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + \dots + f'_n(x)$ .

c) Montrer alors que

$$V_n = f_0(2) + f_1(2) + \dots + f_n(2) - e$$

d) On pose pour  $n \geq 0$ ,

$$T_n = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Montrer que  $V_n = e^2 T_n - e$  (on utilisera la question c)

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

3°) En utilisant les limites de  $B_n$  et  $T_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , calculer les limites quand  $n \rightarrow +\infty$  des expressions suivantes :

$$C_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2n!}$$

$$D_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}$$