PARTIE C

Soit φ la transformation plane d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$.

5°) Démontrer que φ est une symétrie glissée.

6°) Démontrer que $r = g \circ \varphi$ a pour écriture complexe : $z' = (1 - i)z$.

7°) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0.$$

a) Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma') = r(\Gamma)$.

b) Démontrer que (Γ') est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

FIN

Benin, Juin 2005

F 306

N.B. : Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème

DUREE : 4 heures

EXERCICE 1

1°) p_1, p_2, p_3 sont des entiers naturels premiers et constituent dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2.

a) Démontrer que un et un seul des nombres p_1, p_2, p_3 est un multiple de 3.

b) Déterminer p_1, p_2, p_3.

2°) x, y et z sont des entiers relatifs tels que : $3x + 5y + 7z = 0$.

a) Démontrer que l'on a : $y \equiv z\ [3]$.

b) En déduire que x, y et z s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -5p - 7q - 4r \\ y = 3p + r \\ z = 3q + r \end{cases}, \quad r \in \{0, 1, 2\} \text{ et } (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

3°) $ABCDEFGH$ est un pavé droit de centre O tel que $AB = 10$, $AD = 5$ et $AE = 5$. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ et $(\mathcal{P})$ est le plan d'équation $3x + 5y + 7z = 0$ dans ce repère.

Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières de $(\mathcal{P})$ qui sont intérieurs au pavé $ABCDEFGH$.

suite en page 2

EXERCICE 2

Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x, définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x\ln\left(\left|1-\frac{1}{x}\right|\right)}, \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1°) Etudier les variations de g.

2° -a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3° -a) Etudier la continuité de f en 1.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

c) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis donner une interprétation géométrique de chacun des résultats.

4° -a) Etudier les variations de f.

b) Prouver que $f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$.

5°) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et les demi-tangentes éventuelles à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 1.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

PARTIE A

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :

$$P(z) = z^3 - \left[2 + (3+\sqrt{2})i\right] z^2 + \left[-5 - 3\sqrt{2} + (2\sqrt{2}+1)i\right] z + \sqrt{2} + 5i\sqrt{2}.$$

suite en page 3

1° -a) Démontrer que $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :
$P(z) = (z + 1 - i)Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.

b) Ecrire, sous forme algébrique, le nombre complexe :

$$d = \left[3 + (2-\sqrt{2})i\right]^2.$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

a) Calculer les affixes respectives des points A' et C', images respectives de A et C par f.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

PARTIE B

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$; on pose $g = f \circ h$.

3° -a) Déterminer l'écriture complexe de h.

b) Démontrer que g a pour écriture complexe : $z' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

4° -a) Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$, avec x et y entiers. On note $N = g(M)$.

Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$5x + 3y = 15.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x + 3y = 15$.

c) En déduire les points M du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient orthogonaux.

suite en page 4