

DUREE : 4 Heures

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

1- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) l'équation $3x - 4y = 6$

b) le système

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 \pmod{8} \end{cases}$$

2- On pose $x = 18 + 32n$, $y = 12 + 24n$ et $S = (x+y)^\alpha$, $n \in \mathbb{IN}$, $\alpha \in \mathbb{IN}$.

Déterminer suivant les valeurs de α le reste de la division euclidienne de S par 4.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté (P) , on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$$\text{mes} \left(\widehat{AB, AD} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

k étant un élément de \mathbb{Z} . On pose $AB = a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

Soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = a^2$$

1- Soit M un point du plan (P) .

a) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow (MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2)$$

b) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L .

c) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow \left(MO^2 = \frac{a^2}{4} \right)$$

d) Caractériser (Γ) .

2- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la réflexion d'axe (AB) . On pose $f = r \circ s$

et $(\Gamma') = f(\Gamma)$.

a) Déterminer la droite (Δ) telle que $r = \varphi \circ s$, où φ est la réflexion d'axe (Δ) .

b) Caractériser l'application f .

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') (on prendra $a = 2$ cm).

Suite en page 2

PROBLEME

On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{E}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Première partie

- 1- a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x - \ln x$.
b) En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.
- 2- Soit D l'ensemble de définition de f .
a) Démontrer que $D = [-1, +\infty[$
b) Démontrer que f est continue sur D .
c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
d) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 .
- 3- a) Etudier les variations de f .
b) Construire la courbe (\mathcal{E}) .

Deuxième partie

4- On pose $I = [-1, 0]$ et $J = f(I)$.
Soit la fonction :

$$\begin{aligned} g: I &\rightarrow J \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

et (\mathcal{E}') sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- a) Démontrer que g est bijective.
Soit g^{-1} la bijection réciproque de g .
- b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que (\mathcal{E}) .
- c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de J .
- d) Calculer

$$\int_{-1}^0 [g^{-1}(x)] dx$$

Suite en page 3

5- Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a) Calculer A .

b) En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes (\mathcal{E}') et (Γ) .

Troisième partie

Pour tous nombres réels x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z défini par :

$$z = x + i \frac{y - 1}{1 + \sqrt{-y^2 + 2y}} \quad \text{avec } i^2 = -1$$

Soit (Γ') l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

6- Soit u un nombre complexe non nul.

Démontrer que :

$$\left(\arg u = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

7- Soit $M(x, y)$ un point du plan.

a) Etablir que :

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1 + \sqrt{1 - (y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow (y = g^{-1}(x) + 1)$$

c) Démontrer que (Γ') est l'image de (Γ) par une translation t et caractériser t .

8- a) En déduire que (Γ') est l'image de (\mathcal{E}') par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t .

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette composée.

FIN