

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a – Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
b – Dresser le tableau de variation de f .
c – Tracer la courbe \mathcal{C} .

2) Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par $F(x) = \int_1^{1+(\log x)^2} f(t)dt$.

- a – Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et que $F'(x) = 2 \log x$
b – Calculer $F(x)$.

3) Pour tout $\alpha \geq 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

- a – Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.
b – Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha)$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Une urne contient quatre dés indiscernables au toucher.

Trois dés sont verts et leurs faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

et un dé est rouge et ses faces sont numérotées 2, 2, 4, 4, 6, 6.

1) On tire au hasard un dé.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A « le dé tiré est rouge »

B « le dé tiré est vert »

2) Une épreuve consiste à tirer au hasard un dé puis le lancer trois fois de suite.

On désigne par C l'événement suivant :

C « obtenir 3 fois de suite un numéro pair »

a – Montrer que $p\left(\frac{C}{A}\right) = 1$ et $p\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{1}{8}$

b – En déduire $p(C)$.

3) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.

- a – Déterminer la loi de probabilité de X .
b – Calculer l'espérance et la variance de X .

PROBLEME : (10 points)

Soient A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose

$O = R(A)$ et $B = R(O)$.

1) a – Construire les points O et B.

b – Montrer que le quadrilatère IBOA est un losange.

2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI.

Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R.

a – Montrer que lorsque le point M décrit le cercle (Γ) , son image M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.

b – Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ') .

Montrer que si M est différent de I, les points M, Ω et M' sont alignés.

3) Soit f l'antidépacement défini par $f(A) = O$ et $f(O) = B$.

a – Montrer que f est une symétrie glissante. Préciser son axe et son vecteur.

b – Vérifier que $f = s_{(OB)} \circ R$ où $s_{(OB)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe la droite (OB).

c – Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que $R(N) = f(N)$.

4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B.

On désigne par S la similitude directe définie par $S(A) = C$ et $S(O) = D$ et on pose $h = SoR^{-1}$.

a – Déterminer $h(O)$ et $h(B)$.

b – En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c – Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.

5) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = O$ et $g(D) = B$.

a – Déterminer le rapport de g. En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.

b – On désigne par (d) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droites (d) et (OC).

Soit E' l'image de E par g. (Il est conseillé de faire une figure d'étude à part pour cette question).

Montrer que $\overline{JE'} = \frac{1}{2} \overline{JE}$.

c - Montrer que $\left(\overline{CD}, \overline{JE} \right) \equiv - \left(\overline{OB}, \overline{JE} \right) [2\pi]$.

En déduire que les droites (d) et (CD) sont parallèles.

d – soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (d). Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC' et en déduire que $\overline{EC} = -2 \overline{EO}$.

e – Construire alors le point E, l'axe (d) et le centre J de la similitude g.