

**EXAMEN
DU BACCALAUREAT**

SESSION DE JUIN 2007

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
DURÉE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1 + i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.

a – Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AN} sont orthogonaux.

b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle \mathcal{C} que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AMN.

b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle \mathcal{C} .

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{BC, BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{BC, BA})$ coupe [AC] en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) a – faire une figure.

b – Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2) Soit f la similitude directe telle que : $f(B) = O$ et $f(H) = H'$.

a – Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.

b – Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)].

En déduire que A est le centre de f.

3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.

a – Montrer que les points B, O et D sont alignés.

b – Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que $f(C) = D$.

c – Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, ou $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).

a – déterminer $g(A)$ et $g(C)$.

b – Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c – Soit Ω le centre de g.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega A}$.

Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

PROBLEME : (10 points)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A -1) Soit g_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a - Dresser le tableau de variation de g_n

b - Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α_n .

c - Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.

d - En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$.

On désigne par \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$.

En déduire que la courbe \mathcal{C}_n admet deux asymptotes que l'on précisera.

b - Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $f'_n(x) = \frac{e^x g_n(x)}{(n + e^x)^2}$.

c - Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

d - Donner le tableau de variation de f_n .

3) a - Etudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_n et de la droite D d'équation $y = x$.

b - Etudier la position relative des courbes \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_{n+1} .

c - Tracer les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

(On prendra 2 cm pour unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \simeq -1,4$, $\alpha_2 \simeq -1,2$).

B - Soient $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$ et $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$.

1) Calculer I .

2) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-1, 0]$, $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n+1}$.

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4) On pose $V_n = \sum_{k=1}^n U_k$.

a - Montrer que pour tout entier naturel non nul k , $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$.

b - En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \text{Log}(n+2) - \text{Log} 2$.

c - Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$.