

Pays	TOGO	Epreuves	Mathématiques
Examen	Baccalauréat	Durée	4h
Session	Normale	Coeff.	3
Année	2014	Série	D

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les solutions z_k de (E).

2. On pose : $n = 5$.

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points-images des solutions z_k de (E).

3. On pose : $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a) Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimer α en fonction de \bar{j} .

b) Montrer que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$.

4. Soit la transformation T de P dans P , qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P

d'affixe z' tels que : $z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$.

a) Écrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

b) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance. » ;
- O l'événement : « Le personnel interrogé est un opérateur de production. » ;
- I l'événement : « Le personnel interrogé est un ingénieur. » ;
- F l'événement : « Le personnel interrogé est une femme. »

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

a) un agent de maintenance ;

b) une femme agent de maintenance ;

c) une femme.

3. Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue.

Des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « L'alarme se déclenche. »
- B l'événement : « Une panne se produit. »

a) Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

b) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

PROBLEME

A) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que pour tout nombre réel non nul u , on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x}$.

Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $\alpha < 0 < \beta < 1$.

b) Vérifier que : $-2,75 < \alpha < -2,74$.

B) On pose : $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et $I = [0; 1]$.

1. Montrer que β est l'unique solution de l'équation : $x > 0, g(x) = x$.

2. Montrer que pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .

3. Soit g' la fonction dérivée de g . Montrer que pour tout x de I , on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4. On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I .

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_n - \beta|$, puis que $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n_0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

e) Calculer la valeur correspondante de U_{n_0} .

C)

1. a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à (\mathcal{C}) en $-\infty$.

b) Étudier l'autre branche infinie de (\mathcal{C}) .

2. Construire avec soin (Δ) et (\mathcal{C}) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra : $\alpha \approx -2,7$ et $\beta \approx 0,8$).

3. a) Par des intégrations par parties, calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x) dx$.

b) Exprimer l'aire $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ du domaine du plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ en fonction de α et β seulement.