UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*).

Le plan orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie :

$$j\ z^2 + \overline{j\ z^2} - \frac{10}{3} z\overline{z} + 192 = 0$$

et f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{3} j^2 z$ avec $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

On rappelle que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, $|j| = 1 = j^3 = j\ \overline{j}$.

1. Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques. 0.5 *pt*

2. a. Vérifier qu'un point M' d'affixe z' appartient à $f(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$3z'^{\,2} + 3\overline{z'^{\,2}} - 10z'\ \overline{z'} + 64 = 0$$

Montrer alors que l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est une équation cartésienne de $f(\mathcal{E})$. $0.5 + 0.5$ *pt*

b. Montrer que $\mathcal{E}$ est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

1 *pt*

3. Représenter graphiquement $f(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$, leurs foyers, leurs directrices et leurs axes. 1.5 *pt*

Exercice 2 (5 *points*).

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8+n$ boules noires et 20 boules blanches.

Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.

S'il tire une boule rouge, il perd.

S'il tire une boule noire, il gagne.

S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

1. a. Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est $f(n)$ où f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$. 0.75 *pt*

b. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale.

Calculer alors cette probabilité. $0.5 + 0.25$ *pt*

c. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité. $0.5 + 0.25$ *pt*

2. Dans cette question, on suppose que $n = 16$.

Pour jouer, le joueur a misé 8 unités monétaires.

p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique.

$0.75 + 0.5$ *pt*

b. On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est à dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle.

Montrer alors que $3p + q = 60$. Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.

$0.25 + 0.5$ *pt*

c. Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart type X.

$0.25 + 0.5$ *pt*

PROBLEME (11 points).

Partie A : Introduction d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln \frac{x}{k}\, dx \leq 0.$ 2×0.5 *pt*

b. Prouver alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{1/2}^{n+1/2} \ln x\, dx - \ln(n!) \leq 0.$

0.75 *pt*

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\sqrt{2} \geq 0$ 0.5 *pt*

2. Soit g et f les fonctions numériques définies sur $I = [0, 1[$ par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \\[2ex] f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\, dt \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1 \end{cases}$$

a. Dresser le tableau de variations de g. 0.5 *pt*

b. Montrer que $\forall x \in]0, 1[,\ 1 \leq f(x) \leq g(x)$. (On pourra au besoin appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $u \overset{h}{\longmapsto} \displaystyle\int_0^u g(t)\, dt$ dans l'intervalle $[0, x]$ ou utiliser la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0, x]$.)

f est-elle continue en 0 ? $0.5 + 0.25$ *pt*

c. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in I, g(t) = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

En déduire que $\forall x \in]0, 1[,\ f(x) = \dfrac{1}{2x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$. 2×0.25 *pt*

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n$$

a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 1 - f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$; en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$0.5 + 0.25$ *pt*

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln\sqrt{2}$. 0.5 *pt*

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. 0.25 *pt*

Partie B : Dans cette partie, on se propose de trouver la limite de la suite (u_n).

On admettra que si une suite (α_n) a pour limite ℓ, alors la suite (α_{2n}) a aussi pour limite ℓ.

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$

1. a. Calculer v_1. Montrer que la suite (v_n) est décroissante et positive. 3×0.25 *pt*

b. En intégrant par parties, prouver que

$$(E)\ : \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} v_n.$$

0.75 *pt*

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et calculer alors $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$. 2×0.25 *pt*

d. Démontrer que la suite (a_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (n+1)v_{n+1}v_n$$

est constante (Indication : On pourra calculer $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$). Déterminer cette constante. 2×0.25 *pt*

e. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ nv_n^2 = \dfrac{n}{n+1} a_n \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} nv_n^2 = \frac{\pi}{2}$. 2×0.25 *pt*

2. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = v_{2n}$

a. Quelle est la limite de la suite $(n\, b_n^2)$? 0.25 *pt*

b. En utilisant la relation (E), démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \dfrac{\pi}{2}$.

0.75 *pt*

3. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e}^{u_n} = n! \left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 0.5 *pt*

b. Déterminer une constante A telle que pour tout entier naturel n non nul :
$\mathrm{e}^{u_{2n} - 2u_n} = A\sqrt{nb_n^2}$; en déduire les limites des suites (u_n) et $\left(\mathrm{e}^{u_n}\right)$. $0.5 + 2 \times 0.25$ *pt*