Baccalauréat C et E 2014 : Correction intégrale.

Exercice 1 (3 points).

Le plan complexe est rapporté à un

1. Montrons que les points A,B ,C et D ne sont pas coplanaires.
   On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-4,2,6)$, $\overrightarrow{AD}(0;1;0)$. D'où $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 2$.
   Donc les pints A, B , C et D ne sont pas coplanaires.
2. (a) Ecrivons une équation cartésienne du plan (ABC)
   Soient $M(x,y,z)$, $\overrightarrow{n}(-2;1;3)$ un vecteur normal du plan (ABC)
   $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 3z + 3 = 0$

   (b) Calculons le volume V du tétraedre $(ABCD)$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times d(D,(ABC))\right) \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{6+4+36} \times \frac{|-2+3|}{\sqrt{4+1+9}} u.v \\ &= \frac{1}{2}2\sqrt{14} \times \frac{1}{\sqrt{14}} u.v \\ &= \frac{1}{3} u.v \end{aligned}$$

   (c) Déterminons l'expression analytique de la reflexion f de plan (ABC)
   Soient $M(x;y;z)$ et $M(x';y';z')$, I le milieu du segment $[MM']$
   On a $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{n} \text{ ou } k \in \mathbb{R} (1) \\ I \in (ABC)(2) \end{cases}$

   $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2\lambda \\ y' = y + \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z' = z + 3\lambda \end{cases}$

   (2) donne $-2\left(\frac{x+x'}{2}\right) + \left(\frac{y+y'}{2}\right) + 3\left(\frac{z+z'}{2}\right) + 3 = 0$

   D'où $\lambda = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{3}{7}$

   On en déduit donc l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{6}{7} \\ y' = \frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{3}{7} \\ z' = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - \frac{9}{7} \end{cases}$$

3. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $(S') = f((S))$ où $(S) = \delta(D, BD)$
   Posons $D' = f(D)$. On a $D'\left(\frac{9}{7};\frac{-1}{7};\frac{-3}{7}\right)$ et $BD = \sqrt{5}$
   Donc (S') est la sphère de centre D' et de rayon $\sqrt{5}$

Exercice 2

1. (a) Déterminons les réels a et b pour que la fonction g soit une solution sur $\mathbb{R}$ de (E)
   g solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) = 2\cos x + \sin x$, qui équivaut à :
   $(-a - 4b + 4a)\cos x + (-b + 4a + 4b)\sin x = 2\cos x + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, qui équivaut à :
   $$\begin{cases} 3a - 4b = 2 \\ 4a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

   (b) Démontrons que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0)
   On a $(f-g)$ solution de $(E_0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f-g)''(x) - 4(f-g)'(x) + 4(f-g)(x) = 0$
   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = g''(x) - 4g'(x) - 4g(x)$
   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 2\cos x + \sin x$
   $\Leftrightarrow$ f solution de (E)

   (c) Resolvons (E_0) puis donnons la forme générale des solutions de (E)
   L'équation caractéristique de $(E_0) : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une seule solution $r = 2$;
   donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$
   où A et B sont des constantes réelles et $x \in \mathbb{R}$

2. (a) Soit $x \in [0; \pi[$, calculons $h'(x)$ et $h''(x)$
   On a $h'(x) = -\dfrac{2}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x$ et $h''(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$

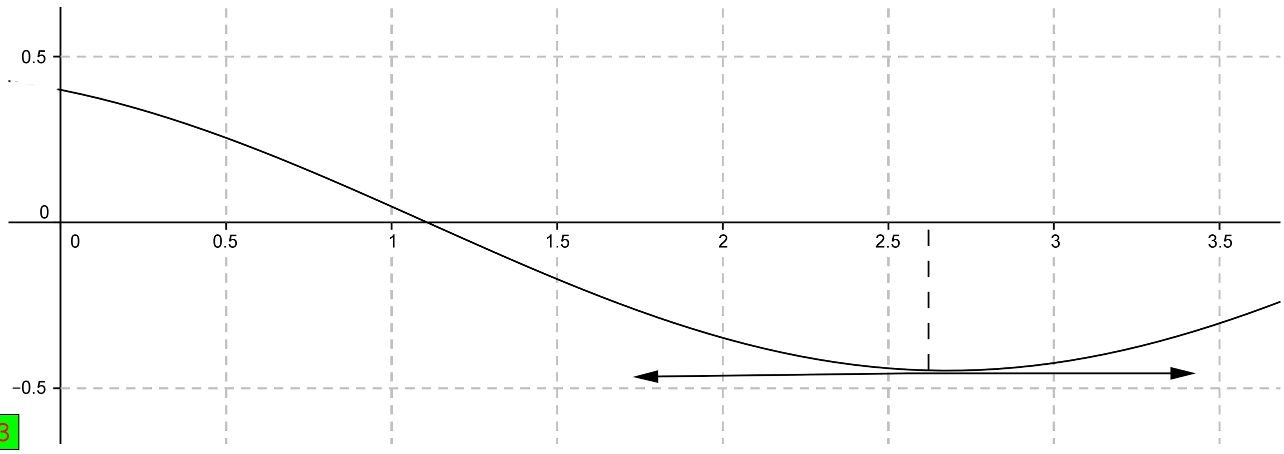
   (b) Etudions les variations de $h'(x)$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ et déduisons - en que l'équation $h'(x) = 0$ admet dans cet intervalle une unique solution α telle que $2,6 < \alpha < 2,7$
   Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$, on a $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$. par suite la fonction h' est strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$.
   De plus, h' est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$; $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{5}$ et $\lim\limits_{x \to \pi} h'(x) = \dfrac{1}{5}$.
   Donc l'éuation $h'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$.
   Comme $h'(2,6) \times h'(2,7) < 0$, alors $2,6 < \alpha < 2,7$

   (c) Montrons que $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; \pi[$ et dressons le tableau de variation de h.
   Soit $x \in [0; \pi[$. On a : $h'(x) = -\dfrac{2}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x$
   - Pour $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, on a $-\dfrac{2}{5}\sin x < 0$ et $-\dfrac{1}{5}\cos x < 0$; d'où $h'(x) < 0$
   - Pour $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \alpha$, on a $h'(x) \leq h'(\alpha)$, car h' est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$; d'où $h'(x) \leq 0$
   - Pour $0 < x < \pi$, on a : $h'(\alpha) < h'(x)$ car h' est strictement croissante sur $[\alpha; \pi[$;
     d'où $0 < h'(x)$
     Au total, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; \pi[$
     On a donc le tableau de variation suivant.

x	0		α		π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\dfrac{2}{5}$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$-\dfrac{2}{5}$

$\beta = h(\alpha) \approx h(2,6) \approx -0,45$

(d) Tracé de la courbe de h.



Exercice 3

1. (a) Soit $a > 0$, montrons que $1 - a < \dfrac{1}{1+a} < 1$

   On a $\dfrac{1}{1+a} - (1-a) = \dfrac{a^2}{1+a} > 0$ et $\dfrac{1}{1+a} - 1 = \dfrac{-a}{1+a} < 0$, donc $1 - a < \dfrac{1}{1+a} < 1$

   (b) Déduisons - en que : $a - \dfrac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$

   Soit $t \in]0; a]$. On a : $1 - t < \dfrac{1}{1t} < 1$ voir 1.a). D'où $\displaystyle\int_0^a (1-t)dt < \int_0^a \frac{1}{1+t}dt < \int_0^a 1dt$

   (Les fonctions : $t \mapsto 1 - t, t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto 1$ étant continues sur $[0; a]$)

   Donc $\left[t - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^a < [\ln(1+t)]_0^a < [1]_0^a$

   C'est à dire $a - \dfrac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$

2. (a) Soit n un entier naturel non nul, montrons que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Par récurrence.

   Pour $n = 1$, on a $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$. Donc l'égalité est vraie pour $n = 1$

   Supposons $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et

   montrons que $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

   En effet $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

   Donc pour tout entier naturel non nul n, on a $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) Montrons que : $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{12}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln P_n < \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

   On a $\ln P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et pour tout entier k compris entre 1 et n, d'après 1.b, on a : $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right) < \dfrac{k}{n^2}$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) < \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

   Donc $\displaystyle\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 < \ln nP_n < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

   C'est à dire que : $\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right) - \dfrac{1}{2n^4}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] < \ln P_n < \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

   ou encore $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{12}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln P_n < \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(c) Déduisons - en que la suite (P_n) est convergente et déterminons sa limite.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}\right]=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

La suite $(\ln P_n)$ converge donc vers $\frac{1}{2}$,

par suite, la suite (P_n) est convergente et sa limite est $\sqrt{e}$ car $P_n=e^{\ln P_n}$

PROBLEME 10 points

Partie A

1. (a) Montrons que pour tout point M de (P), $\psi\circ\psi(M)=M$

   On a $\psi\circ\psi(O)=\psi(O)$. Si $M\neq O$, alors en posant $\psi(M)=M_1$ et $\psi(M_1)=M'$,
   on a $\overrightarrow{OM_1}=\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}=\frac{4}{OM_1^2}\overrightarrow{OM_1}=\frac{4}{\frac{16}{OM^2}}\times\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$, d'où $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$.
   par suite $M'=M$
   Donc $\psi\circ\psi(M)=M$ pour tout point M de (P).

   (b) Justifions que l'ensemble des points M distincts de O tels que $\psi(M)=M$ est le cercle de centre O et de rayon 2.
   Soit $M\in(P)\setminus\{O\}$, on a $\psi(M)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\frac{4}{OM^2}=1\Leftrightarrow OM=2$

2. Justifions que (d) est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z=a+it$ où $t\in\mathbb{R}$
   Soit $M(z)$. On a $M\in(d)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{e_1}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/z-z_D=ik$
   $\Leftrightarrow k\in\mathbb{R}/z=a+i(k+b)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/z=a+it$

3. (a) Soit $M(z)$, $M'(z')$ tous distincts de O. Montrons que : $\psi(M)=M'\Leftrightarrow z'=\frac{4}{\overline{z}}$
   On a $\psi(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{OM'}=\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow Z'=\frac{4}{|z|^2}Z\Leftrightarrow Z'=\frac{4z}{z\overline{z}}\Leftrightarrow Z'=\frac{4}{\overline{z}}$

   (b) Montrons que $\psi(M)=M'\Leftrightarrow x'=\frac{4a}{a^2+t^2}$ et $y'=\frac{4t}{a^2+t^2}$
   On a $\psi(M)=M'\Leftrightarrow Z'=\frac{4}{\overline{z}}\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{4}{a-it}\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{4a+4it}{a^2+t^2}$
   $\Leftrightarrow x'=\frac{4a}{a^2+t^2}$ et $y'=\frac{4t}{a^2+t^2}$

   (c) Vérifions que $\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2+y'^2=\frac{4}{a^2}$
   Cette égalité n'a de sens que pour $a\neq0$. Et our tout de tels a :
   $\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2+y'^2=\left(\frac{4a}{a^2+t^2}-\frac{2}{a}\right)^2+\frac{16t^2}{(a^2+t^2)^2}=\frac{(2a^2-2t^2)^2+16a^2t^2}{a^2(a^2+t^2)^2}=\frac{4(a^2+t^2)^2}{a^2(a^2+t^2)^2}=\frac{4}{a^2}$

   (d) Déduisons - en que si $M\in(d)$, alors , $\psi(M)\in(C_1)$, cercle de diamètre $[OH']$
   Soit (d) la droite constituée des points M d'affixe z tel ue $z=a+it$, avec $a\neq0$;
   on a : $z_H=a$ et $z_{H'}=\frac{4}{a}$
   Soit $N(x;y)$. On a $N\in(C_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{H'N}=0\Leftrightarrow x\left(x-\frac{4}{a}\right)+y^2=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+y^2=\frac{4}{a^2}$
   Comme $\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2+y'^2=\frac{4}{a^2}$ alors $\psi(M)\in(C_1)$

4. <Montrons que l'image de (C_1) par h est une ellipse dont on calculera l'excentricité e.
   On a : $\begin{cases}x=x_1\\ y=\frac{3}{2}y_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x\\ y_1=\frac{2}{3}y\end{cases}$ Ainsi $\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+y^2=\frac{4}{a^2}\Leftrightarrow\left(x_1-\frac{2}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{2}y_1\right)^2=\frac{4}{a^2}$
   $\Leftrightarrow\frac{\left(x_1-\frac{2}{a}\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}+\frac{(y_1)^2}{\left(\frac{4}{3a}\right)^2}=1$. Donc $h((C_1))$ est une ellipse d'excentricité $e=\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2-\left(\frac{4}{3a}\right)^2}}{\frac{2}{|a|}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Partie B

1. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul, exprimons $\varphi\left(\frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et montrons que φ n'est pas une application linéaire.
On a $\varphi\left(\frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right) = \frac{4\|\overrightarrow{v}\|^2}{16} \times \frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|^2}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$
$\frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\varphi(\overrightarrow{v}) = \frac{16}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$. Comme $\varphi\left(\frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}\right) \neq \frac{4}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\varphi(\overrightarrow{v})$ pour $\|\overrightarrow{v}\| \neq 2$, alors φ n'est pas une aplication linéaire.

2. (a) Déterminons l'ensemble $Inv(\varphi)$
Soit $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{P})$. On a $\overrightarrow{u} \in Inv(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$ ou $\overrightarrow{u} = \frac{4}{\|u\|^2}.\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$ ou $\frac{4}{\|\overrightarrow{u}\|^2} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$ ou $\|\overrightarrow{u}\| = 2$. Donc $Inv(\varphi) = \{\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{P}) / \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$ ou $\|\overrightarrow{u}\| = 2\}$

   (b) calculons $\|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\|$ et montrons que $Inv(\varphi)$ n'est pas un sous espace vectoriel de de $(\overrightarrow{P})$
On a $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})^2 = \overrightarrow{u_1}^2 + \overrightarrow{u_2}^2 + 2\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 4 + 4 + 4 = 12$. Donc $\|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{12}$
En outre, on a $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ qui appartiennent à $Inv(\varphi)$,
mais $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ n'appartient pas à $Inv(\varphi)$
Donc $Inv(\varphi)$ n'est pas un sous espece vectoriel de $(\overrightarrow{P})$

3. Déterminons l'ensemble $Opp(\varphi)$ et montrons que $Opp(\varphi)$ est un sous espace vectoriel de $(\overrightarrow{P})$
Soit $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{P})$. $u \in Opp(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$. Donc $Opp(\varphi) = \{\overrightarrow{O}\}$.
Le singleton $\{\overrightarrow{O}\}$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{P}$;
$Opp(\varphi)$ est alors un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{P}$