A - ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1 **2,5 points**

On pose $X = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

1. Calculer et rendre rationnel le dénominateur du nombre $\dfrac{X+1}{X}$ 1,5pt

$\dfrac{X+1}{X} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \dfrac{3+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{5}}{1-5}$

$= \dfrac{-2+2\sqrt{5}}{-4} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = X$

$\dfrac{X+1}{X} = X$

2. Scachant que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$, déterminer un encadrement de X par deux nombres décimaux 1pt

Soit $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

(i) Multiplions par le signe (-) : Le sens de l'inégalité change : $-2{,}23 > -\sqrt{5} > -2{,}24$
Soit $-2{,}24 < -\sqrt{5} < -2{,}23$

(ii) Ajoutons le nombre 1 à chaque membre de l'inégalité précédente : $1-2{,}24 < 1-\sqrt{5} < 1-2{,}23$
C'est à dire : $-1{,}24 < 1-\sqrt{5} < -1{,}23$

(iii) Divisons pour terminer chaque membre de l'inégalité par 2 : $\dfrac{-1{,}24}{2} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{-1{,}23}{2}$

Soit $-0{,}62 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < -0{,}61$

Exercice 2 **2 points**

1. Developper et reduire le polynôme $(2x-3)(x+2)$ 0,5pt

$(2x-3)(x+2) = 2x^2+4x-3x+2 = 2x^2+x+2$; $\boxed{2x^2+x+2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-3)(x+2) = 0$ 1pt

$(2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0$ ou $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -2$. $S = \left\{-2; \dfrac{3}{2}\right\}$ $\boxed{S = \left\{-2; \dfrac{3}{2}\right\}}$

3. Recopier sur votre feuille de comosition la réponse juste de la question suivante.
L'ensemble des réels x tel que $-5 \leqslant 2x-3 \leqslant 3$ est : 0,5pt

a. $[-5{,}3]$ | b. $[-1{,}3[$ | c. $\boxed{[-1{,}3]}$ | d. $[-3{,}1]$

Soit l'équation : $-5 \leqslant 2x-3 \leqslant 3$

(i) Ajoutons 3 à chacun des membres de l'équation : $-5+3 \leqslant 2x-3+3 \leqslant 3+3 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2x \leqslant 6$

(ii) Divisons chaque membre par 2 : $\dfrac{-2}{2} \leqslant \dfrac{2x}{2} \leqslant \dfrac{6}{2} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$

Exercice 3 **2 points**

On a relevé le taux de cholestérol dans le sang, en centigramme par centilitre (cg/cl) de 25 hommes dont l'âge varie entre 50 et 59 ans, et on a obtenu les résultats suivantes :

120	242	200	185	197
203	138	152	265	178
187	218	175	197	132
146	183	188	144	248
237	196	255	240	185

1. Recopier et compléter le tableau suivant. 1,25pt

Taux de cholestérol	[120,150[	[150,180[	[180,210[	[210,240[	[240,270[
Effectif	5	3	10	2	5

2. A partir de $240cg/cl$, on considère que le sujet est à surveiller.
Quel est le pourcentage des sujets à surveiller dans ce groupe ? 0,75pt

(i) Combien de personnes ont un taux supérieur à 140 ? Ils sont exactement 5, d'après le tableau.

(ii) Le pourcentage est donc de : $\frac{5}{25}\times 100\% = 20\%$

B : ACTIVITES GEOMETRIQUES : 6,5 points

Exercice 4 **3 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O,I,J). On donne les points $A(2,1)$ et $B(0,2)$

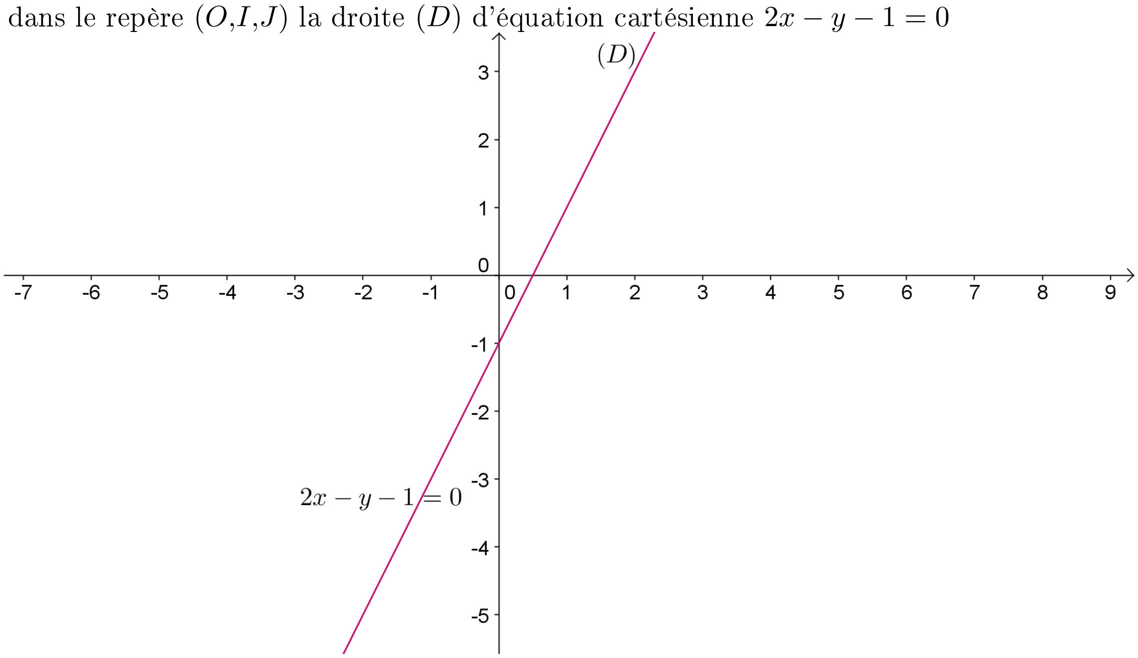
1. Ecrire une équation cartésienne de la droite (AB) 1pt

(i) Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

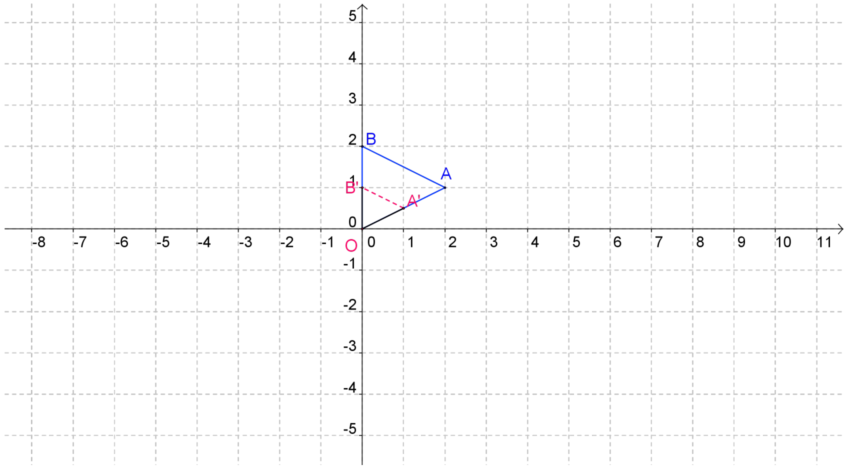
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB}(-2,1)$$

(ii) Soit $M(x,y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est de coordonnées $\overrightarrow{AM}(x-2,y-1)$
On obtient alors : $1\times(x-2)-(-2)\times(y-1)=0$
C'est à dire : $x-2+2y-2=0$, $x+2y-4=0$

2. Tracer dans le repère (O,I,J) la droite (D) d'équation cartésienne $2x-y-1=0$ 1pt



3. Construire l'image du triangle OAB par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ 1pt



Exercice 5 **3,5 points**

On donne un triangle ABC tel que AC = 6 cm et AB=8cm et BC=10cm

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle. 0,5pt

   $AC^2 = 6^2 = 36$

   $AB^2 = 8^2 = 64$

   $BC^2 = 10^2 = 100$

   On remarque tout de suite que $AC^2 + AB^2 = 100 = BC^2$. Donc $AC^2 + AB^2 = BC^2$

   Le triangle ABC est rectangle en A.

2. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et O le centre de ce cercle.

   Calculer le rayon du cercle (C) 0,5pt

   Le triangle ABC est rectangle en A Son hypothénuse est $[BC]$. Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse.

   Le rayon est donc $\frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$

3. a. Calculer le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ 0,5pt

   $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

   b. En déduire une mesure de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOC}$ 1pt

   $\sin\widehat{ABC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Donc d'après le tableau, $\text{mes}\widehat{ABC} = 38{,}87^o$; $\boxed{\text{mes}\widehat{ABC} = 38{,}87^o}$

   $\text{mes}\widehat{AOC} = 2 \times mes\widehat{ABC} = 77{,}74^o$; $\boxed{\text{mes}mes\widehat{ABC} = 77{,}74^o}$

4. E est le milieu de $[AB]$; montrer que les droites (AC) et (OE) sont parallèles. 1pt

   On peut avoir deux approches

   (i) Dans le triangle ABC, la droite (EO) est **une droite** des milieux. Donc $(EO)//(AC)$

   (ii) Appliquons la réciproque de la propriété de **Thalès**

   $\frac{BE}{BA} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

   $\frac{BO}{BC} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

   $\frac{BE}{BA} = \frac{BO}{BC}$ donc $(EO)//(AC)$

NB on donne

α en degré	35,45	36,15	38,87	37,588
$\sin\alpha$	0,58	0,59	0,6	0,61

Problème **7 points**

Une citerne transparente a la forme d'un cône de capacité 1800 litres. L'aire de la base S dudit cône est de $1{,}5m^2$

1. Calculer la hauteur de cette citerne. 1pt

$V = \dfrac{B\times h}{3} \Rightarrow h = \dfrac{3V}{B} = \dfrac{3\times 1800}{1{,}5} = \dfrac{3\times 1{,}8m^3}{1{,}5m^2} = 3{,}6m\,;\ \boxed{h = 3{,}6m}$

2. Cette citerne étant pleine d'eau, on ouvre le robinet situé sur sa partie inférieure ; à un moment donné, on constate qu'il reste 225 litres d'eau dans la citerne. Cette eau prend la cône semblable au grand cône et de base S'

a. Calculer le rapport $\dfrac{V'}{V} = k^3$ 1pt

$\dfrac{V'}{V} = \dfrac{225}{1800} = \dfrac{1}{8}$

b. En déduire la hauteur h' du petit cône. 1pt

(V volume initial et V' volume d'eau à ce moment, k coefficient de reduction)

$\dfrac{h'}{h} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow h' = \dfrac{h}{8} = \dfrac{3{,}6}{8} = 0{,}45m\,;\ \boxed{h' = 0{,}45m}$

3. On suppose que le débit du robinet ci - dessus est de 15 litres par minutes et que la citerne est pleine. Calculer le temps necessaire pour vider la citerne. 1pt

Soit d le bébit, V le volume et t le temps. $d = \dfrac{V}{t} \Rightarrow t = \dfrac{V}{d} = \dfrac{1800}{15} = 120min$

4. On désigne pat t, le temps en minute d'écoulement du robinet et $V(t)$ le volume en mètre cube de l'eau qui reste dans la citerne après le temps t.

a. Montrer que $V(t) = 1{,}8 - 0{,}015t$ 1pt

(i) Le volume initial est $1800l = 1800dm^3 = \dfrac{1800}{1000} = 1{,}8m^3$

(ii) Le débit est de 15 litres par minutes, c'est à dire $\dfrac{15}{1000} = 0{,}015m^3$ par minutes

(iii) La quatité d'eau qui s'échappe après un temps t est $0{,}015\times t = 0{,}015t$ (t en minutes). La quantité restante $V(t) = 1{,}8 - 0{,}015t$

b. Calculer $V(90)$ et $V(120)$ 1pt

$V(90) = 1{,}8 - 0{,}015\times 90 = 0{,}45m^3\,;\ \boxed{V(90) = 0{,}45m^3}$

$V(120) = 1{,}8 - 0{,}015\times 120 = 0\,;\ \boxed{V(120) = 0}$

c. Après combien de temps restera - t-il exactement $0{,}9m^3$ d'eau dans la citerne. 1pt

Resolvons l'équation $1{,}8 - 0{,}015\times t = 0{,}90$

$1{,}8 - 0{,}015\times t = 0{,}90 \Rightarrow -0{,}015t = 0{,}9 - 1{,}8 = -0{,}9$

Soit $-0{,}015t = -0{,}9$

$-0{,}015t = -0{,}9 \Rightarrow t = \dfrac{-0{,}9}{-0{,}015} = 60 \text{ min}\,;\ \boxed{t = 60min}$

NB on notera que $0{,}125 = \dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$