Probatoire C et E 2014 : CORRECTION INTEGRALE.

Exercice 1

1. (a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

   (b) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a+b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

   a et b sont les solutions éventuelles de l'équation $(E) : x^2 - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$

   Comme les solutions de (E) sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors on a $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

   Donc $\boxed{S = \left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

   (c) Déduisons - en les solutions du système $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

   D'après 1.b) on a $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$

   D'où $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $y = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$ et $y = \dfrac{\pi}{6}$

   $$\boxed{S = \left\{\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}}$$

2. (a) Déterminons le noyau $Kerf$ et l'image Imf de f.
   On a $DetM = -\dfrac{1}{2}$. Comme $DetM \neq 0$, alors $Kerf = \{\overrightarrow{o}\}$ et $Imf = E$

   (b) Justifions que M' est la matrice inverse de M

   On a $M' = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \dfrac{1}{DetM}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

   Donc $M^{-1} = M'$

Exercice 2

1. Représentons le nuage de points de la serie statistique.

2. (a) Calculons la valeur approchée d'ordre 2 par excès de la covariance.

X	1	2	3	4	5	6	7	28	4
Y	1,5	2	3,5	1	6	8	10	32	4,5714
XY	1,5	4	10,5	4	30	48	70	168	24

$Cov(X,Y) = \overline{(XY)} - (\overline{X} \times \overline{Y}) = 24 - (4 \times (4,57)) = 5,72$

(b) i. Calculons le coefficient de corrélation linéaire r
$r = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \dfrac{5,72}{\sqrt{4} \times \sqrt{10,46}} \approx 0,8843$

ii. Justifions qu'une équation de la droite de regression de y en x est $y = 1,43x - 1,15$
Une équation de la droite de regression de y en x est $y = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}(x - \overline{x}) + \overline{y}$
Ainsi $y = \dfrac{5,72}{4}(x-4) + 4,57$. D'où $y = 1,43x - 1,15$

(c) Déduisons - en une estimation du nombre de visiteurs de ce site en l'année de rang 31.
On a $x = 31$, ainsi $y = 1,43 \times 31 - 1,15 = 43,18$
Donc le nombre de visiteurs est 43.

3. (a) Déterminons le nombre de façons de parcourir les 5 escales. $5! = 120$

(b) Déterminons le nombre de façons de parcourir les 5 escales si on commence par A. $4! = 24$

Problème

Partie A :

1. Déterminons l'angle de la rotation r.
L'angle de r est $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}})$ sa mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$

2. (a) Montrons que $OM^2 = ON^2 = 18 - 6AM + AM^2$
On a $OM^2 = \overrightarrow{OM}^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO})^2 = AM^2 + AO^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = AM^2 + AO^2 - 2\overline{AM} \times \overline{AJ}$
Où J milieu de $[AD]$ est le projeté orthogonale de O sur (AD).
D'où $OM^2 = ON^2 = 18 - 6AM + AM^2$
De même $ON^2 = \overrightarrow{ON}^2 = (\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DO})^2 = DN^2 + DO^2 - 2\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DO}$
$ON^2 = DN^2 + DO^2 - 2\overline{DN} \cdot \overline{DK}$
Où K milieu de $[CD]$ est le projeté orthogonale de O sur (CD).
D'où $ON^2 = DN^2 + 18 - 6DN = AM^2 + 18 - 6AM$, car $DN = AM$
Donc $OM^2 = ON^2$

(b) Déduisons - en O est le centre de la rotation.

Soit Ω centre de r. On a $\begin{cases} r(A)=A \\ r(M)=N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega A=\Omega D \\ \Omega M=\Omega N \end{cases}$

Ainsi Ω est le point d'intersection des médiatrices de $[AD]$ et $[MN]$.

Donc $\Omega = O$, car $ON = OM$ et $OA = OD$

3. (a) Déterminons k et écrivons M comme barycentre de A et D.

On a $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM} \Leftrightarrow \dfrac{x}{6}\overrightarrow{AD} = \dfrac{-k(6-x)}{6}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+k(6-x)}{6}\right)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{O}$

Donc $k = \dfrac{x}{x-6}$ car $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{O}$ et $x \neq 6$

On a $\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow M = \text{Bar}\{(A,1);(D,-k)\}$

D'où $M = \text{Bar}\{(A,6-x);(D,-k(6-x))\}$

Donc $M = \text{Bar}\{(A,6-x);(D,x)\}$

(b) Vérifions l'égalité et écrivons M comme barycentre de I et M

On a $(7-x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = (1+6-x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (6-x)\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GD}$

En outre $G = \text{Bar}\{(A,7-x);(B,1);(D,x)\}$

D'où $G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(A,6-x);(D,x)\} = \text{Bar}\{(I,2);(M,6)\}$,

car $I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$ et $M = \text{Bar}\{(A,6-x);(D,x)\}$

(c) Justifions que $\overrightarrow{G'J} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$

$\begin{cases} r(I)=J \\ r(M)=N \\ r(G)=G' \end{cases} \Rightarrow G' = \text{Bar}\{(J,1);(N,3)\}$, car r conserve le barycentre.

Ainsi $\overrightarrow{JG'} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{JN}$, donc $\overrightarrow{G'J} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$

4. (a) Exprimons les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x.

L'aire de IAM est : $\dfrac{AI \times AM}{2} = \dfrac{3}{2}x$

L'aire de MDN est $\dfrac{DN \times DM}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$

(b) Montrons que l'aire A_1 de $BCNI$ est $27 - x$

L'aire de $BCNI$ est $A_1 = \dfrac{(BI+CN) \times BC}{2} = \dfrac{(3+6-x)\times 6}{2} = 27 - 3x$

(c) Déduisons que l'aire A de IMN est $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3x}{2} + 9$

L'aire de IMN est $A = 36 - \left[(27-3x) + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{6x-x^2}{2}\right] = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3x}{2} + 9$

Partie B :

1. Calculons les limites.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 6 \\ x<6}} f(x) = 18$

2. (a) Etudions les variations de f et dressons le tableau de variation.

On a $f'(x) = x - \dfrac{3}{2}$, pour tout x dans $[0;6]$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$. Ainsi f est croissante sur $\left[\dfrac{3}{2};6\right]$ et décroissante sur $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. On a le tableau de variation suivant.

x	0	3/2	6
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	9 ↘	63/8	↗ 18

(b) Déduisons - en que pour tout $x \in [0;6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

f admet un minimum sur $[0;6]$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ d'après 2.a).

Donc pour tout $x \in [0;6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

(c) Déterminons x pour que l'aire du triangle IMN soit minimale.
L'aire du triangle IMN en unité d'aire est $f(x)$.
Donc cette aire est minimale pour $x = \frac{3}{2}$

3. Représentons f.

4. (a) Etudions la continuité et la dérivabilité de g en 0.

$$\text{On a } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9 \text{ si } x \in [0;6] \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9 \text{ si } x \in [-6;0] \\ g(0) = 9 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 9$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 9 = g(0)$ et la fonction g est continue en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x-3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.

(b) Justifions que la fonction g est paire.
Soit $x \in [-6;6]$, $-x \in [-6;6]$ et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$
Donc la fonction g est paire.

(c) Construisons en traits interrompus couts la courbe de g. voir question 3