CORRECTION DU PROBATOIRE C 2015

Exercice1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2-2x-1=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times4\times(-1)=20=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{20}}{8}=\dfrac{2-2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

$x_1=\dfrac{2+\sqrt{20}}{8}=\dfrac{2+2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4};\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$

Pour toute la suite, on pose $x=\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $y=\sin\dfrac{\pi}{5}$

2. Exprimer $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ en fonction de x et y

On a $\sin 2a=2\sin a\cos a$

Donc $\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\left[2\times\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right]=2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}=2xy$

3. (a) Justifier que $\cos\dfrac{2\pi}{5}=1-2y^2=2x^2-1$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\cos^2\dfrac{\pi}{5}-\sin^2\dfrac{\pi}{5}=1-\sin^2\dfrac{\pi}{5}-\sin^2\dfrac{\pi}{5}=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{5}=1-2y^2$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\cos^2\dfrac{\pi}{5}-\sin^2\dfrac{\pi}{5}=\cos^2\dfrac{\pi}{5}-\left(1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1+\cos^2\dfrac{\pi}{5}$

$=2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1=2x^2-1$

Donc $\cos\dfrac{2\pi}{5}=1-2y^2=2x^2-1$

(b) En déduire que : $\sin\dfrac{3\pi}{5}=y\left(4x^2-1\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$=y\left(2x^2-1\right)+y\times 2xy=x\left(2x^2-1\right)+x\times 2xy$$

$$=y\left(2x^2-1\right)+y\times 2x^2=y\left(2x^2-1+2x^2\right)=y\left(4x^2-1\right)$$

Conclusion : $\sin\frac{3\pi}{5}=y\left(4x^2-1\right)$

4. (a) Justifions que $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$

$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\frac{2\pi+3\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}=\pi$ en plus $\sin x=\sin(\pi-x)$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{5}$$

Donc $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$

(b) Déduisons que $4x^2-2x-1$

On a montré précédemment que $\sin\frac{3\pi}{5}=y\left(4x^2-1\right)$ et $\sin\frac{2\pi}{5}=2xy$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}\Rightarrow y\left(4x^2-1\right)=2xy\Rightarrow 4x^2-1=2x\Rightarrow 4x^2-2x-1=0$$

On a donc $4x^2-2x-1=0$

(c) Déduisons alors que : $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On sait que $x=\cos\frac{\pi}{5}$, donc $4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$

$\cos\frac{\pi}{5}$ est donc la solution positive de l'équation $4x^2-2x-1=0$

$$0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}>0$$

Or $\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, donc $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Finalement $\sin^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}=1 \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{16-5-1-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Conclusion : $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice2

1. Justifier que x et y vérifient le système $\begin{cases}43x+75y=3700\\ x+y=60\end{cases}$

On a $x+y+10+30=100 \Rightarrow x+y=60$

$$M=7300 \Rightarrow \frac{1500\times 10+4300\times x+7500\times y+10500\times 30}{100}=7300$$

Donc $150+43x+75y+3150=7300 \Rightarrow 43x+75y=3700$

On obtient donc le système $\begin{cases}43x+75y=3700\\ x+y=60\end{cases}$

2. Déduisons les valeurs de x et y

$y=60-x$

$43x+75(60-x)=3700 \Rightarrow 43x+4500-75x=3700$

$-32x=3700-4500=-800$

$x=\frac{80}{32}=2{,}5$ et $y=60-x=57{,}5$

$x=25$ et $y=35$

3. Un opérateur de téléphonie locale voudrait attribuer les prix identiques à un groupe de personnes choisies au hasard parmi les ayant dépensé 10500 FCFA

(a) De combien de façons peut-on constituer le groupe à primer ? : C_{30}^{5}