PROBATOIRE C/E 2010/CAMEROUN

Exercice 1

On pose $g(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$ où x est un réel.

1. Montrer que pour tout réel x, $g(x+\pi) = g(x)$
2. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = 1 + \cos 2x + \sin 2x$
3. Resoudre dans $]0,\pi]$ l'équation $g'(x) = 0$ où g' est la dérivée de g et representer les solutions trouvées sur un cercle trigonométrique.

Exercice 2

$ABCD$ est un rectangle de centre O. I est le milieu de $[AB]$. Les droites (AC) et (DI) se coupent en E. Les droites (BD) et (IC) se coupent en F.

1. Déterminer l'image du triangle ABC par la reflexion d'axe (OI).
2. Montrer que le point F est le centre de gravité du triangle ABC
3. En déduire que E est le centre de gravité du triangle BAD
4. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en E.
   a. Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles
   b. Déterminer $h(B)$

Exercice 3

Pour chacune des questions suivantes, recopier le numero de la question et le numéro de la reponse choisi parmi celles proposées.

1. Sachant que $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$, alors :

   a. $\cos x = \frac{2}{5}$ | b. $\cos x = -\frac{4}{5}$ | c. $\cos x = \frac{4}{5}$ | d. $\cos x = -\frac{2}{5}$

2. Si $ABCDEFGH$ est le cube ci - dessous, alors la droite (DG) est :
   a. Perpendiculaire au plan (GFH) car $(DG) \perp (GH)$ et $(GF) \perp (DA)$
   b. Parallèle au plan (CFH)
   c. Perpendiculaire au plan (CHE)
3. ABC est un triangle équilatéral ; I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. $S_{(BC)}$ et $S_{(JK)}$ sont les symétries d'axes (BC) et (JK) respectivement. L'application $S_{(BC)} \circ S_{(JK)}$ est :
   a. La translation de vecteur $2\overrightarrow{AI}$
   b. La rotation de centre A
   c. La translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$

Problème

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A :

f est la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

On note (C) la courbe representative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, d'unité 1cm sur les axes.

1. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
2. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D, on ait $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C)
3. Montrer que le point $\Omega(-1, -4)$ est centre de symétrie pour la courbe (C)
4. Tracer la courbe (C)
5. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

   a. Etudier la parité de g, puis comparer $g(x)$ et $f(x)$ pour x positif.

   b. Tracer la courbe (C') représentation de g dans le même graphique que (C)

Partie B :

La suite (U_n) est déinie par $U_0 = 1$ et pour tout entier n, par $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 3}$

1. Calculer U_1 et U_2
2. On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$

   a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique ; préciser son premier terme et sa raison.

   b. Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de la suite (U_n)