PROBATOIRE C/E 2011/CAMEROUN

Exercice 1 — 5 points

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$; on considère les points $A(2;-3)$, $B(1,-2)$ et C tel que C soit le barycentre de A et B affectés des coefficients 2 et -1.

1. Montrer que A est le milieu de $[BC]$
2. On considère (C) et (C') les cercles d'équations cartésiennes respectives :
   $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ et $x^2+y^2-6x+8y+23=0$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de (C) et (C').
   b. Montrer que (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre A.
   c. Soit (D) la droite d'équation cartésienne $x-y+c$. Déterminer c pour que (D) soit une tangente commune à (C) et (C')
   d. Tracer (D) , (C) et (C')

Exercice 2 — 4 points

Chacune des questions suivantes se termine par une affirmation écrite en gras; dire dans chaque cas si cette affirmation est vraie ou fausse. Aucun calcul n'est démandé sur votre feuille ce composition.

1. G est le barycentre du système de points pondérés du plan. $\left\{(A,\cos^2\alpha);(B,-\sin^2\alpha);\left(C,\frac{1}{2}\right)\right\}$
   avec $\alpha\in]-\pi,\pi[$
   G existe pour $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$
2. Le plan vectoriel étant rapporté à la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et f est l'endomorphisme défini de la manière suivante : $f(\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j})=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})=-2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$
   f **est un isomorphisme**
3. L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Φ est la sphère de centre $\Omega(1{,}1{,}0)$ et de rayon 2. P est le plan d'équation cartésienne $x+y+z\sqrt{2}+2=0$
   L'intersection de P et de Φ est un cercle.
4. (U_n) et (V_n) sont deux suites numériques définies de la manière suivante :
   $$\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=1+\dfrac{U_n-1}{2U_n-1} \end{cases} \quad et \quad V_n=\frac{1}{U_n-1}$$
   V_n **est une suite arithmétique de raison 2.**

Problème **11 points**

Partie A : 7,5 points

On considère la fonction numérique définie pour tout réel x différent de -1 par : $f(x) = \dfrac{4x^2+5x+2}{x+1}$

(C) désigne dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de f.

1. Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que le point $I(-1; -3)$ est centre de symétrie de (C)
5. Montrer que C admet une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne (on écrira $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x+1}$, a, b et c étant des nombres réels que 'on déterminera.)
6. Tracer (C)
7. S_I désigne la symétrie de centre I et S_Δ la symétrie d'axe $(x'ox)$; construire dans le même repère l'image (C') de la courbe (C) par la transformation $S_\Delta \circ S_I$ (On pourra utiliser le résultat de la question 4.)

Partie B : 3,5 points

$ABCDEFGH$ est un cube (figure ci - contre.)

1. Déterminer les coordonnées de C, F G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
2. Donner une équation cartésienne du plan (CFH) et calculer la distance du point G à ce plan.
3. Montrer que le triangle CFH est équilatéral.