PROBATOIRE C/E 2012/CAMEROUN

Exercice 1

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|4x+2| > |3-x|$
2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : (x-1)(x^2-3) = 39$
   a. Ecrire 39 sous la forme d'un produit de facteurs premiers.
   b. Trouver alors une solution de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
   c. Montrer que cette solution entière est l'unique qu'admet l'équation (E) dans $\mathbb{R}$
3. Calculer le réel A défini par $A = \left(1+\frac{1}{4}\right) \times \left(1+\frac{1}{5}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{999}\right)$

Exercice 2

1. Soit θ un nombre réel.
   a. Développer $\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2$
   b. En déduire que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$
   c. Resoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{5}{8}$
2. Soit (U_n) une suite géométrique de raison q telle que : $U_0 \in \mathbb{R}^*$; $q > 0$ et $\begin{cases} U_0 \times U_1 \times U_2 = 27 \\ U_0 \times U_2 \times U_4 = 216 \end{cases}$
   a. Déterminer la raison et le terme initial U_0
   b. En déduire U_n en fonction de n.

Problème

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C

Partie A :

1. On considère les fonctions numériques suivantes : $\begin{cases} f : [-2,2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} g : [0,4] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 4x + 5 \end{cases}$
   (C) et (C') sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan P
   a. Construire la courbe (C)
   b. Vérifier que pour tout x de $[0,4]$, $g(x) = f(x-2)+1$
   c. Comment peut - on déduire la courbe (C') à partir de la courbe (C)
   d. Construire la courbe (C')
2. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et par h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Soient I et J les points du plan de coordonnées respectives (1,0) et (0,1)
   a. Construire les images I' et J' des points I et J par la transformation $s = r \circ h$
   b. Donner la nature du triangle $OI'J'$

c. Démontrer que les droites (II') et (JJ') sont perpendiculaires.

d. Montrer que $II' = JJ'$

Partie B :

E est le plan vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et f est l'application linéaire de E dans E définie par
$f(\overrightarrow{i}) = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. Déterminer le noyau de f.
3. f est - elle bijective ? Justifier votre réponse.
4. Donner une base de l'image de f.
5. Donner l'expression analytique de $f \circ f$

Partie C :

L'Espace (E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y + 6z = 0$ et $3x - 6y + 2z + 1 = 0$

1. Démontrer que (P) et (P') sont perpendiculaires
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) d'intersection des deux plans (P) et (P')
3. Soit A le point de coordonnées $(-4,1,-2)$

   a. Calculer la distance du point A à (P) et à (P')

   b. En déduire la distance de A à (D)