Probatoire C et E 2014.

L'épreuve est constituée de 2 exercices et d'un problème que le candidat traitera obligatoirement.

Exercice 1

1. (a) Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} a+b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

   (c) En déduire dans $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

   les solutions du sysstème d'inconnues $(x; y)$ suivant : $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

2. Dans le plan vectoriel E muni d'une base $B = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère l'application linéaire f de E dans E et de matrice $M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ relative à B

   (a) Déterminer le noyau et l'image de f.

   (b) On pose $M' = 2M - 2I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que M' est la matrice inverse de M.

Exercice 2

On s'est interessé au nombre de personnes qui ont visité un site touristique sur 7 ans.
Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci - dessous.

Rang de l'année (X)	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de personnes en milliers (Y)	1,5	2	3,5	1	6	8	10

1. Représenter le nuage de points de la serie statistique ainsi définie.
2. (a) Calculer la covariance de la serie statistique $(X; Y)$.
   On donnera le résultat à 10^{-2} près par excès.

   (b) En prenant la moyenne de Y égale à 4,57 ;
   la variance de X égale à 4 et la variance de Y égale à 10,46 :

   i. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

   ii. Justifier qu'une équation de la droite de regression de Y en X est :
   $y = 1,43x - 1,15$

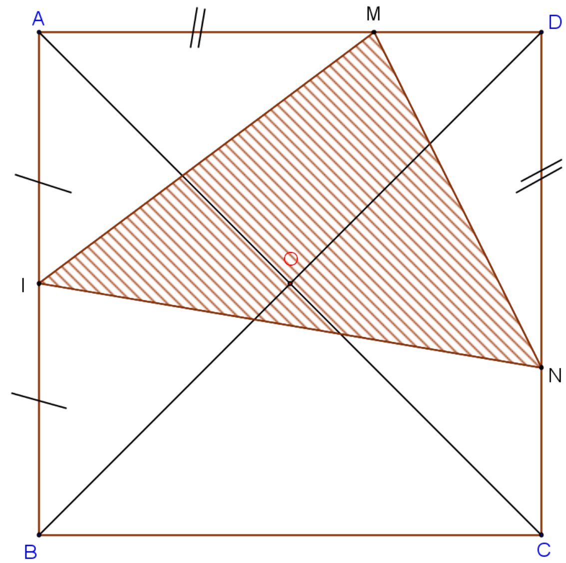
   (c) En déduire une estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de rang 31.
3. Ce site comporte 5 escales distinctes nommées A, B, C , D et E.
   Elles sont obligatoires pour tous les visiteurs qui y passent une seule fois par escale.
   De combien de façons distinctes peut - on :

   (a) Parcourir les 5 escales

   (b) Parcourir les 5 escales si on commence toujours par l'escale A ?

Problème

Partie A :



Dans le plan orienté,
$ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté $AB = 6$.
I est le milieu du segment $[AB]$, M et N des points des segments $[AD]$ et $[DC]$
respectivement tels que $AM + DN$; $M \neq A$ et $M \neq D$

1. Soit r la rotation qui transforme A en D et M en N.
   Déterminer la mesure principale de l'angle r.
2. (a) Montrer que $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$

   (b) En déduire que O est le centre de la rotation r.

   On pose pour toute la suite $AM = x$ et on appelle G le barycentre du système $A(7-x)$, $B(1)$ et D(x)
3. (a) Soit k un réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM}$.
   Déterminer k en fonction de x et en déduire que M est le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients $6-x$ et x

   (b) Verifier que $(7-x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (6-x)\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GD}$ et en déduire que G est le barycentre des points M et I affectés des coefficients que l'on déterminera.

   (c) Soit G', l'image de G par r et J le milieu de $[AD]$. Justifier que $\overrightarrow{G'J} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$
4. (a) Exprimer les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x.

   (b) Montrer que l'aire $\mathscr{A}_1$ du trapèze $BCNI$ rn unité d'aire est : $\mathscr{A}_1 = 27 - x$

   (c) En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle IMN en unité d'aire est $\mathscr{A} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$

Partie B :

Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   (b) En déduire que pour tout réel $x \in [0; 6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

   (c) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale.
3. Représenter f dans un repère orthogonal. (Echelle : 1cm pour unité en abscisse ; 1cm pour 3 unités en ordonnées)
4. SOit g la fonction définie de $[-6; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

   (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

   (b) Justifier que g est une fonction paire.

   (c) Déduire en traits interrompus courts, la courbe de g de celle de f.