DOUALA Mathematical Society

EXERCICE CORRIGES : Congruences

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

1. $5^{2n}-3^{n}$ est divisible par 11
2. $7^{n}-1$ est divisible par 6
3. $3^{2n}-2^{n}$ est divisible par 7
4. $3\times 5^{3n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17

RESOLUTION

1. Etudions les puissances de 5 modulo 11.

   $5^0 \equiv 1(11)$

   $5^1 \equiv 5(11)$

   $5^2 \equiv 3(11)$

   $5^3 \equiv 4(11)$

   $5^4 \equiv 9(11)$

   $5^5 \equiv 1(11)$

   On constate que $5^2 \equiv 3(11)$

   On a donc $5^2 \equiv 3(11) \Rightarrow 5^{2n} \equiv 3^n(11) \Rightarrow 5^{2n}-3^n \equiv 0(11)$

   $5^{2n}-3^n \equiv 0(11)$ donc $5^{2n}-3^n$ est divisible par 11.

2. Etudions les puissances de 7 modulo 6.

   $7^0 \equiv 1(6)$

   $7^1 \equiv 1(6)$

   $7 \equiv 1(6) \Rightarrow 7^n \equiv 1(6) \Rightarrow 7^n-1 \equiv 0(6)$, donc 7^n-1 est divisible par 6.

3. Etudions les puissances de 3 modulo 7.

   $3^0 \equiv 1(7)$

   $3^1 \equiv 3(7)$

   $3^2 \equiv 2(7)$

   $3^3 \equiv 6(7)$

   $3^4 \equiv 4(7)$

   D'après ce qui précède, $3^2 \equiv 2(7)$

   Donc $3^2 \equiv 2(7) \Rightarrow 3^{2n} \equiv 2^n(7) \Rightarrow 3^{2n}-2^n \equiv 0(7)$

   $3^{2n}-2^n \equiv 0(7)$ donc $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

4. Etudions les puissances de 5 modulo 17.

n	5^n	$(5^n;\text{mod}(17))$
1	5	5
2	25	8
3	125	6
4	625	13
5	3125	14
6	15625	2
7	78125	10
8	390625	16
9	1953125	12
10	9765625	9
11	48828125	11
12	244140625	4
13	1220703125	3

Etudions les puissances de 2 modulo 17

n	2^n	$(2^n;\text{mod}(17))$
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	15
6	64	13
7	128	9
8	256	1
9	512	2
10	1024	4
11	2048	8
12	4096	16
13	8192	15

D'après cette étude, on a :

$$5^2 \equiv 8(17) \Rightarrow 5^{2n} \equiv 8^n(17)$$
$$\Rightarrow 5^{2n+1} \equiv 5\times 8^n(17)$$
$$\Rightarrow 3\times 5^{2n+1} \equiv 15\times 8^n(17)(i)$$

$$2^3 \equiv 8(17) \Rightarrow 2^{3n} \equiv 8^n(17)$$
$$\Rightarrow 2^{3n+1} \equiv 2\times 8^n(17)(ii)$$

De i et ii, on a $\begin{cases} 3\times 5^{2n+1} \equiv 15\times 8^n (17) \\ 2^{3n+1} \equiv 2\times 8^n (17) \end{cases}$..

En faisant la somme membre à membre, on a $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 15\times 8^n + 2\times 8^n (17)$

D'où $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 17\times 8^n (17)$

Soit $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0(17)$

On conclu donc que $3\times 5^{3n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17

Par Nkeuna Ngueliako Georges
PLEG – Mathématiques
Ingénieur des travaux informatiques
679308003 – 699438997
Douala - Cameroun