DOUALA Mathematical Society

EXERCICE CORRIGES : arithmétique

EXERCICE N°1 :

Soit n un entier naturel impair. Montrer que $n^2 \equiv 1(4)$

EXERCICE N°2 :

1. Démontrer que tout entier relatif n est tel son carré est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(n+1)^2 - 1 \equiv 0(8)$

EXERCICE N°3 :

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0(13)$

EXERCICE N°4 :

Déterminer les entiers qui, dans la division euclidienne par 7, ont un quotient égal au reste

EXERCICE N°5 :

Le reste de la division euclidienne de a par 11 est 8, celui de b par 11 est 2. Quel est le reste de la division euclidienne des

Nombres $a+b$, ab et a^2 par 11 ?

EXERCICE N°6 :

Soit q un entier vérifiant : $10^{10} = 17q - 49$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{10} par 17.

RESOLUTION

EXERCICE N°1 :

Soit n un entier naturel impair.

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k$$

Donc $n^2 - 1 = 4p$, $p \in \mathbb{Z}$, avec $p = 4k^2 + 4k$

Finalement $n^2 \equiv 1(4)$

EXERCICE N°2 :

1. Soit n un entier naturel impair

   Dans la congruence modulo 8, on a 8 cas possible, ou alors plus simplement, lorsqu'on divise par 8, on a 8 restes possibles. 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7

   Donc si n est un nombre entier naturel,

   $n \equiv 0(8)$ou $n \equiv 1(8)$ou $n \equiv 2(8)$ou $n \equiv 3(8)$ou $n \equiv 4(8)$ou $n \equiv 5(8)$ou $n \equiv 6(8)$ou $n \equiv 7(8)$

   résumons dans un tableau

Si n est congru à	0	1	2	3	4	5	6	7
Alors n^2 est congru à	0	1	4	1	0	1	4	1

   Ce tableau nous montre bien que les restes possibles de n^2 dans la division par 8 sont 0, 1 ou 4

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(n+1)^2 - 1 \equiv 0(8)$

   D'après le tableau ci – dessus, l'équation $(n+1)^2 - 1 \equiv 0(8) \Rightarrow (n+1)^2 \equiv 1(8)$

   Donc

   $(n+1)^2 \equiv 1(8) \Rightarrow n+1 \equiv 1(8)$ ou $n+1 \equiv 3(8)$ ou $n+1 \equiv 5(8)$ ou $n+1 \equiv 7(8)$

   Finalement,

   $n \equiv 0(8)$ ou $n \equiv 2(8)$ ou $n \equiv 4(8)$ ou $n \equiv 6(8)$

   Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(n+1)^2 - 1 \equiv 0(8)$ sont donc :

   $n = 8k$ ou $n = 8k+2$ ou $n = 8k+4$ ou $n = 8k+6$

   $S = \{8k \; ; \; 8k+2 \; ; \; 8k+4 \; ; \; 8k+6 \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE N°3 :

Soit n un entier naturel.

Posons $X = 5^n$, alors l'équation devient $X^2 + X \equiv 0(13)$

Nous allons résoudre cette équation dans l'ensemble des classe d'équivalence modulo 13, noté $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$X^2 + X$													

$X \equiv$	$X^2 + X \equiv$
0	0
1	2
2	6
3	12
4	7
5	4
6	3
7	4
8	7
9	12
10	6
11	2
12	0

D'après ce tableau, nous avons comme solution : $X \equiv 0(13)$ ou $X \equiv 12(13)$

C'est-à-dire : $5^n \equiv 0(13)$ ou $5^n \equiv 12(13)$

Etudions (toujours dans Excel) les puissances de 5 modulo 13.

k	5^k	$\mathrm{mod}(5^k;13)$
0	1	1
1	5	5
2	25	12
3	125	8
4	625	1
5	3125	5
6	15625	12
7	78125	8
8	390625	1
9	1953125	5
10	9765625	12
11	48828125	8
12	244140625	1

On se rend compte que $5^4 \equiv 1(13)$

Donc

$5^{4k} \equiv 1(13)$

$5^{4k+1} \equiv 5(13)$

$5^{4k+2} \equiv 12(13)$

$5^{4k+3} \equiv 8(13)$

On écrit donc $5^n \equiv 12(13) \Rightarrow n = 4k+2$

La solution l'ensemble dans entiers naturels de l'équation est $5^{2n} + 5^n \equiv 0(13)$:

$S = \{4k+2 \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE N°4 :

Soit a un tel entier. Dans ce cas, $a = 7r + r = 8r$, $r < 7$, r étant le reste.

Donc ces entiers sont : 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48.

k	$8k$	Quotient par 7	Reste
1	8	1	1
2	16	2	2
3	24	3	3
4	32	4	4
5	40	5	5
6	48	6	6

EXERCICE N°5 :

- $\begin{cases} a \equiv 8(11) \\ b \equiv 2(11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 10(11) \\ ab \equiv 16(11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 10(11) \\ ab \equiv 5(11) \end{cases}$
- $a \equiv 8(11) \Rightarrow a^2 \equiv 8^2(11) \Rightarrow a^2 \equiv 9(11)$

Par Nkeuna Ngueliako Georges
PLEG – Mathématiques
Ingénieur des travaux informatiques
679308003 – 699438997
Douala - Cameroun
ngueliako@yahoo.fr

EXERCICE N°6 :

$$10^{10} = 17q - 49 \Rightarrow 10^{10} \equiv -49(17)$$
$$\Rightarrow 10^{10} \equiv -15(17)$$
$$\Rightarrow 10^{10} \equiv 2(17)$$

le reste de la division de $10^{10} \equiv 2(17)$ par 17 est