EXERCICES CORRIGES : ARITHMETIQUE	
objectifs	Divisibilité et PGCD.
Date	08 Janvier 2017

EXERCICE 1 :

Déterminer le nombre n de quatre chiffres tel que les reste de la divisions de 21 685 et 33 509 par n soient respectivement 37 et 53.

EXERCICE 2 :

Le PGCD de deux entiers a et b est égal à d. Calculer le PGCD de a^n et b^n avec n entier naturel.

EXERCICE 3 :

Le PGCD de deux entiers a et b est égal à d. Calculer le PGCD des entiers suivants :

1) $7a+4b$ et $9a+5b$
2) $pa+qb$ et $ra+sb$, avec p, q, r et s entiers vérifiant : $ps-qr=1$

EXERCICE 4 :

Soit n un nombre entier naturel. Déterminer le PGCD des entiers $A=2^{n+2}-2^n$ et $B=3^{n+2}-3^n$

EXERCICE 5 :

Déterminer les entiers naturels n inférieurs à 100 tels que : $PGCD(n;380)=5$

EXERCICE 6 :

Déterminer selon les valeurs de $n\in\mathbb{Z}$ le PGCD de A = 4n-9 et B = 2n - 6

EXERCICE 7 :

Démonter que $PGCD(a,b)=PGCD[a+bn,a+b(n-1)],n\in\mathbb{Z}$

EXERCICE 8 :

Montrer que A et B ont un PGCD égal à 1 ou 19, avec $A=13a+3$, $B=15a+2$

EXERCICE 9 :

On considère l'équation $x+y-1=pgcd(x,y)$; où les inconnues x et y sont des entiers.

1. Montrer que si (x,y) est solution, alors le PGCD de x et y est égale à 1.
2. En déduire que si (x,y) est solution, alors x est impair.
3. Déterminer alors toutes les solutions de cette équation.

EXERCICE 10 :

Montrer que l'équation $8x+14y=1$ n'a pas de solution

EXERCICE 11 :

Soit a et b des naturels. Déterminer des fractions $\frac{a}{b}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$0<\frac{a}{b}<1$, $a+b=264$ et le PGCD de a et b est 12.

CORRIGES

EXERCICE 1

$21685 = an + 37$ et $33509 = bn + 53$

$21685 = an + 37 \Rightarrow 21648 = an$

$33509 = bn + 53 \Rightarrow 33456 = bn$

n est donc un diviseur de 21648 et est un diviseur de 33456. Effectuons les divisions euclidiennes.

On obtient : $21648 = 2^4 \times 3 \times 11 \times 41$ et $33456 = 2^4 \times 3 \times 17 \times 41$

Donc $PGCD(21648;33456) = 2^4 \times 3 \times 41 = 1968$. Nous donnons à n la valeur 1968.

En effet : $21685 = 1968 \times 11 + 37$ et $33509 = 1968 \times 17 + 53$

EXERCICE 2

a et b étant deux nombres entiers naturels non nul, tels que $PGCD(a;b) = d$

Notons : $d = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$, où les p_i sont les facteurs premiers communs à a et b, d'exposants α_i

Dans la décomposition de a^n et b^n en produit de facteurs premiers, p_i seront d'exposant $n\alpha_i$

Nous conjecturons que $PGCD(a^n;b^n) = p_1^{n\alpha_1} \times p_2^{n\alpha_2} \times \cdots p_k^{n\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}\right)^n = d^n$

EXERCICE 3

1) $9a + 5b = 7a + 4b + 2a + b \Rightarrow PGCD(9a+5b, 7a+4b) = PGCD(7a+4b, 2a+b)$

On a également

$7a + 4b = 3(2a+b) + a + b \Rightarrow PGCD(7a+4b, 2a+b) = PGCD(2a+b, a+b)$

EXERCICE 4

On a $A = 2^{n+2} - 2^n = 2^n(4-1) = 2^n \times 3$ et $B = 3^{n+2} - 3^n = 3^n(9-1) = 2^3 \times 3^n$

- Si $n = 0$ alors $PGCD(A,B) = 1$
- Si $n = 1$ alors $PGCD(A,B) = 2 \times 3 = 6$
- Si $n = 2$ alors $PGCD(A,B) = 2^2 \times 3 = 12$
- Si $n \geq 3$ alors $PGCD(A,B) = 2^3 \times 3 = 24$

EXERCICE : 5

Déterminons les entiers naturels n inférieurs à 100 tels que PGCD(n ;380)=5

On a $PGCD(n,380)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5n' \\ 380=5\times 76 \\ PGCD(n',76)=1 \end{cases}$

Et $n<100 \Rightarrow 5n'<100$

$\Rightarrow n'<20$

Si $76=2^2\times 19$ t les diviseurs entiers positifs de 76 sont : 1,2,4,19,38,76.

Si $PGCD(n',76)=1$ alors les valeurs de n' sont : 1 , 5, 7, 9 , 11 , 13 , 15 , 17 car $n'<0$

Conclusion, l'ensemble des valeurs de n cherchées est : $\{5;15;25;35;45;55;65;75;85\}$

EXERCICE : 6

Déterminons le signe de A et B.

x	$-\infty$	$\frac{9}{4}$		3	$+\infty$
$4x-9$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$

Pour $n\leq 2$, $A<0$ et $B<0$

Pour $n\geq 4$, $A>0$ et $B>0$

Pour $n=3$, $A=3$ et $B=0$

- 1er cas $n=3$: $PGCD(A,B)=3$

- 2eme cas $n\geq 4$:

On a $4n-9=2(2n-6)+3$

Donc $PGCD(4n-9,2n-6)=PGCD(2n-6,3)=PGCD[2(n-3),3]$

Si $n=3k$, $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ alors $PGCD(A,B)=3$

Si $n\neq 3k$, $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ alors $PGCD(A,B)=1$

- 3eme cas $n\leq 2$:

On a $PGCD(4n-9,2n-6)=PGCD(2n-6,3)=PGCD[2(n-3),3]$

Si $n=-3k$, $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ alors $PGCD(A,B)=3$

Si $n\neq 3k$, $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ alors $PGCD(A,B)=1$

EXERCICE : 7

Posons :

- D_a l'ensemble des diviseurs de a
- D_b l'ensemble des diviseurs de b
- $D = D_a \cap D_b$
- D_1 l'ensemble des diviseurs de $a+bn$
- D_2 l'ensemble des diviseurs de $a+b(n-1)$
- $D_3 = D_1 \cap D_2$

Il suffit de montrer que $D_3 = D$

✓ Montrons que $D \subset D_3$

Soit d un élément de D

d/a et d/b donc $d/a+bn$ et $d/a+b(n-1)$ donc $d \in D_3$, $D \subset D_3$

✓ Montrons que $D_3 \subset D$

Soit d un élément de D_3

On a $(a+bn)-(a+b(n-1)) = b$

Alors d/b et d/a, car $d/a+bn$, c'est-à-dire $d \in D$ et $D_3 \subset D$

Montrons que $PGCD[a+bn, a+b(n-1)] = PGCD(a,b)$

$$\begin{aligned} PGCD[a+bn, a+b(n-1)] &= Max(D_3) \\ &= Max(D_3), \text{car } D_3 = D \\ &= PGCD(a,b) \end{aligned}$$

Conclusion $PGCD(a,b) = PGCD[a+bn, a+b(n-1)]$

EXERCICE : 8

a) On a

$15a+2 = (13a+3)+(2a-1)$

$13a+3 = 6\times(2a-1)+(a+9)$

$a+9 = (a-10)+19$

Donc $PGCD(15a+2, 13a+3) = PGCD(a-10, 19)$

Si a - 10 est multiple de 19, alors ce PGCD est 19, sinon il est égal à 1.

b) Pour que ce PGCD soit égal à 19, on peut choisir a = 19k +10, k étant un entier relatif.

EXERCICE : 9

On a x + y – 1 = pgcd(x, y)

a) Montrons que si (x , y) est solution, alors pgcd(x ,y) = 1.

Supposons que (x , y) est solution et montrons que pgcd(x ,y) = 1.

Posons $p\text{gcd}(x, y) = \delta$

Alors δ / x , δ / y, $\delta / x+y-1$ donc $\delta / 1$

C'est-à-dire $\delta = 1$. D'où $p\text{gcd}(x, y) = 1$

b) Déduisons que si (x,y) est solution, alors x est impair.

Supposons que (x,y) et montrons que x est impair.

En effet $x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$

Si x est pair, alors y est aussi pair, ce qui est absurde car $p\text{gcd}(x, y) = 1$

Donc x est impair.

c) Résolution de l'équation x + y – 1 = pgcd(x, y)

$x + y - 1 = 1$ et $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc $2k + 1 + y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = -2k + 1$

D'où $S = \{(2k+1, -2k+1); k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE : 10

On a $p\text{gcd}(8,14) = 2$ et 2 e divise pas 1 donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

EXERCICE : 11

En effet $p\text{gcd}(a,b) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$, $p\text{gcd}(x', y') = 1$

$a + b = 264 \Leftrightarrow a' + b' = 22$

a'	1	3	5	7	9
b'	252	228	204	180	156

Donc

a	12	36	60	84	108
b	252	228	204	180	156

Ces fractions sont $\frac{12}{252}$; $\frac{36}{228}$; $\frac{60}{204}$; $\frac{84}{180}$ et $\frac{108}{156}$

REDACTION : Janvier 2017

Nkeuna Ngueliako Georges

Seuguep Dieudonné