

**Exercices corrigés.**

a) Montrer que  $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$  est un nombre entier.

b) Déterminer la valeur de  $A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$

**Résolution**

a) Posons  $p = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$  et  $q = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

$$\text{On a } p^3 = \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\right)^3 = 45 + 29\sqrt{2} \text{ et } q^3 = \left(\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}\right)^3 = 45 - 29\sqrt{2}$$

$$p^3 + q^3 = 45 + 29\sqrt{2} + 45 - 29\sqrt{2} = 90$$

$$pq = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(45 + 29\sqrt{2})(45 - 29\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt[3]{(45)^2 - (29\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{2025 - 1682} = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\text{On a } p^3 + q^3 = 90 \text{ et } pq = 7$$

$$\text{On écrit } (p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)$$

$$= 90 + 3 \times 7(p + q) = 90 + 21(p + q)$$

$$(p + q)^3 = 90 + 21(p + q)$$

Posons,  $x = p + q$  on obtient l'équation  $x^3 = 90 + 21x$ , soit  $x^3 - 21x - 90 = 0$

$$x^3 - 21x - 90 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x^2 + 6x + 15) = 0 \Rightarrow x - 6 = 0$$

Car le polynôme  $x^2 + 6x + 15$  n'a pas de racines dans  $\mathbb{R}$ , son discriminant étant négatif.

On peut donc conclure que :

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$$

b) Soit  $A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$

Nous allons procéder comme précédemment.

Posons

$$\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} ; p = \sqrt[3]{28 + \alpha} ; q = \sqrt[3]{28 - \alpha}$$

$$\text{Donc } A = p + q$$

Calculons :  $A^3$

$$A^3 = (p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) \quad (*)$$

$$p^3 + q^3 = \left( \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} \right)^3 + \left( \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} \right)^3 = 28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} + 28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} = 56$$

$$p^3 + q^3 = 56$$

$$\begin{aligned} p^3 \times q^3 &= \left( 28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} \right) \times \left( 28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} \right) = 28^2 - \left( \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} \right)^2 \\ &= 28^2 - \left( \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}} \right)^2 = 28^2 - \frac{4}{9} \times \frac{5290}{3} = 784 - \frac{21160}{27} = \frac{8}{27} = \left( \frac{2}{3} \right)^3 \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que  $p^3 \times q^3 = (pq)^3 = \left( \frac{2}{3} \right)^3 \Rightarrow pq = \frac{2}{3}$

En revenant dans la relation (\*), on obtient  $A^3 = 56 + 3pqA = 56 + 2A$

Considérons le polynôme  $x^3 - 2x - 56$

Une racine évidente est 4. En effet  $(4^3 - 2 \times 4 - 56 = 64 - 64 = 0)$

$$x^3 - 2x - 56 = (x - 4)(x^2 + 4x + 14)$$

L'unique solution de l'équation  $x^3 - 2x - 56 = 0$  est  $x = 4$

On a donc  $p + q = 4$

$$\sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} = 4$$

Par :

Nkeuna Ngueliako Georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun