Exercices corrigés.

a) Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un nombre entier.

b) Déterminer la valeur de $A=\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}+\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$

Résolution

a) Posons $p=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ et $q=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$

On a $p^3=\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)^3=45+29\sqrt{2}$ et $q^3=\left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^3=45-29\sqrt{2}$

$p^3+q^3=45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}=90$

$pq=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(45+29\sqrt{2}\right)\left(45-29\sqrt{2}\right)}$

$=\sqrt[3]{(45)^2-\left(29\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{2025-1682}=\sqrt[3]{343}=\sqrt[3]{7^3}=7$

On a $p^3+q^3=90$ et $pq=7$

On écrit $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$

$=90+3\times 7(p+q)=90+21(p+q)$

$(p+q)^3=90+21(p+q)$

Posons, $x=p+q$ on obtient l'équation $x^3=90+21x$, soit $x^3-21x-90=0$

$x^3-21x-90=0\Rightarrow(x-6)\left(x^2+6x+15\right)=0\Rightarrow x-6=0$

Car le polynôme $x^2+6x+15$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$, son discriminant étant négatif.
On peut donc conclure que :

$$\boxed{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6}$$

b) Soit $A=\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}+\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$

Nous allons procéder comme précédemment.
Posons

$\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$; $p=\sqrt[3]{28+\alpha}$; $q=\sqrt[3]{28-\alpha}$

Donc $A=p+q$

Calculons : A^3

$A^3=(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)\quad(*)$

$$p^3+q^3=\left(\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}\right)^3=28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}+28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}=56$$

$$p^3+q^3=56$$

$$p^3\times q^3=\left(28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}\right)\times\left(28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}\right)=28^2-\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}\right)^2$$

$$=28^2-\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}\right)^2=28^2-\frac{4}{9}\times\frac{5290}{3}=784-\frac{21160}{27}=\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Nous déduisons donc que $p^3\times q^3=(pq)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\Rightarrow pq=\frac{2}{3}$

En revenant dans la relation $(*)$, on obtient $A^3=56+3pqA=56+2A$

Considérons le polynôme $x^3-2x-56$

Une racine évidente est 4. En effet $\left(4^3-2\times4-56=64-64=0\right)$

$x^3-2x-56=(x-4)\left(x^2+4x+14\right)$

L'unique solution de l'équation $x^3-2x-56=0$ est $x=4$

On a donc $p+q=4$

$$\boxed{\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}+\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}=4}$$

Par :

Nkeuna Ngueliako Georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun