EXERCICE CORRIGES : CONGRUENCES

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel.

1. Vérifier que pour tout n, $n^2+2n+2=(n+3)(n-1)+5$.

2. Déterminer alors les entiers naturels pour lesquels $\dfrac{n^2+2n+2}{n+3}$ est un entier.

EXERCICE 2

Déterminer le reste de la division euclidienne de $1!+2!+3!+\cdots+26!+27!$ par 30

EXERCICE 3

1. Prouver que pour tout entier naturel p, $a^p-1=(a-1)\left(a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1\right)$
2. En déduire que pour tout entier naturel pair n, 2^n-1 est divisible par 3 et que $\dfrac{2^{2^{17}}+2^{92}+4}{3}$ est un entier.

EXERCICE 4

1. Vérifier que $3^2\equiv 1(8)$. En déduire que pour tout entier naturel n, $3^{2n}\equiv 1(8)$.
2. Montrer alors que pour tout entier naturel n, $3^{4n+1}+3^{2n+1}+2$ est divisible par 8.

EXERCICE 5

On considère dans les entiers $\mathbb{N}$ $\overline{20}$, $\overline{33}$ et $\overline{1100}$ écrit en base a.

1. Déterminer a sachant que $\overline{20}\times\overline{33}=\overline{1100}$.

2. On considère l'entier naturel $A=\overline{5x23}$ écrit dans la base 6.
   a) En remarquant que $6\equiv -1(7)$, montrer que $A\equiv x-4(7)$. En déduire la valeur de x pour laquelle A est divisible par 7.
   b) Montrer que $A\equiv x(5)$. Déterminer x pour que A soit divisible par 5
   c) A peut - il être divisible par 35 ?

RESOLUTION

EXERCICE 1

1. soit n un nombre entier naturel, $(n+3)(n-1)+5=n^2-n+3n-3+5=n^2+2n+2$
2. Déterminons alors les entiers naturels pour lesquels $\frac{n^2+2n+2}{n+3}$ est un entier

$$\frac{n^2+2n+2}{n+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{(n+3)(n-1)+5}{n+3}\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n-1+\frac{5}{n+3}\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\frac{5}{n+3}\in\mathbb{Z}$$

Donc est un diviseur de 5, donc $n+3\in\{-5;-1;1;5\}$

$n\in\{-8;-4;-3;2\}$

EXERCICE 2

Déterminer le reste de la division euclidienne de $1!+2!+3!+\cdots+26!+27!$ par 30

$1!\equiv 1(30)$

$2!\equiv 2(30)$

$3!\equiv 6(30)$

$4!\equiv 24(30)$

$5!\equiv 0(30)$

Pour $n\geq 5$, $n!\equiv 0(30)$

Donc $1!+2!+3!+\cdots+26!+27!\equiv 1+2+6+24(30)$

$1!+2!+3!+\cdots+26!+27!\equiv 3(30)$

Le reste de la division euclidienne de euclidienne de $1!+2!+3!+\cdots+26!+27!$ par 30 est 3

EXERCICE 3

1. $a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1$ représente la somme des $p-1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison a

   Donc $a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1=\frac{a^{p-1+1}-1}{a-1}=\frac{a^p-1}{a-1}$

   Donc $a^p-1=(a-1)\left(a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1\right)$
2. Soit n , un entier naturel pair. $n=2p$,

   $2^n-1=2^{2p}-1=4^p-1=(4-1)\left(4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots 4^1+1\right)$

On peut écrire $2^n - 1 = 3P$, avec $P = 4^{p-1} + 4^{p-2} + \cdots 4^1 + 1$
Donc est divisible par 3.

Déduisons que $\dfrac{2^{2^{17}} + 2^{92} + 4}{3}$ est un entier

C'est-à-dire, montrons que $2^{2^{17}} + 2^{92} + 4$ est un multiple de 3.

$$
\begin{aligned}
2^{2^{17}} + 2^{92} + 4 &= 2^{2^{17}} - 1 + 1 + 2^{92} - 1 + 1 + 4 \\
&= \underbrace{2^{2^{17}} - 1}_{3k} + \underbrace{2^{92} - 1}_{3k'} + \underbrace{6}_{3\times 2} \\
&= 3k + 3k' + 3\times 2 \\
&= 3(k + k' + 2)
\end{aligned}
$$

Donc $2^{2^{17}} + 2^{92} + 4$ est divisible par 3, et par conséquent, $\dfrac{2^{2^{17}} + 2^{92} + 4}{3}$ est un entier.

EXERCICE 4

1. $3^2 = 9 \Rightarrow 3^2 \equiv 1(8)$. Pour tout entier naturel n, on a donc $3^{2n} \equiv 1^n(8)$, c'est-à-dire $3^{2n} \equiv 1(8)$
2. Soit n un nombre entier naturel.

$$
\begin{aligned}
3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2 &= 3^{4n} \times 3 + 3^{2n} \times 3 + 2 \\
&= \left(3^{2n}\right)^2 \times 3 + 3^{2n} \times 3 + 2
\end{aligned}
$$

Donc $3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2 \equiv (1)^2 \times 3 + 1 \times 3 + 2(8)$

$3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2 \equiv 8(8) \Rightarrow 3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2 \equiv 0(8)$

Donc $3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2 \equiv 8(8)$ est divisible par 8.

EXERCICE 5

1) Déterminons la valeur de a

$$
\begin{aligned}
\overline{20} \times \overline{33} = \overline{1100} &\Rightarrow 2a(3a+3) = a^3 + a^2 \\
&\Rightarrow a^3 + a^2 - 2a(3a+3) = 0 \\
&\Rightarrow a^3 + a^2 - 6a^2 - 6a = 0 \\
&\Rightarrow a^3 - 5a^2 - 6a = 0 \\
&\Rightarrow a\left(a^2 - 5a - 6\right) = 0
\end{aligned}
$$

On obtient donc $a\left(a^2 - 5a - 6\right) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = -1 \text{ ou } a = 6$

Donc $a = 6$

2) Soit $A = \overline{5x23}$ écrit dans la base 6.

a. Montrons que $A \equiv x - 4(7)$.

$$A = \overline{5x23} \Rightarrow A \equiv 5\times 6^3 + x\times 6^2 + 2\times 6^1 + 3(7)$$

$$\Rightarrow A \equiv 5\times(-1)^3 + x\times(-1)^2 + 2\times(-1)^1 + 3(7)$$

$$\Rightarrow A \equiv -5 + x - 2 + 3(7)$$

$$\Rightarrow A \equiv x - 4(7)$$

b. $A \equiv 0(7) \Rightarrow x - 4 \equiv 0(7) \Rightarrow x = 4$

$6 \equiv 1(5)$

Donc $A = \overline{5x23} = 5\times 6^3 + x\times 6^2 + 2\times 6^1 + 3(7)$

$A \equiv 5\times(1)^3 + x\times(1)^2 + 2\times(1)^1 + 3[5]$

$A \equiv x + 10[5] \Rightarrow A \equiv x(5)$

$A \equiv 0(5) \Rightarrow x = 5$

c. Pour que A soit divisible par , 35 il faut qu' il soit divisible par 5 et par 7
A ne peut pas être divisible par 35.