EXERCICES CORRIGES : LIMITES ET CONTINUITE	
objectifs	Etude des fonctions
Date	23 décembre 2016

EXERCICE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier la limite en $-\infty$. Interprétez graphiquement ce résultat.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$
3. Etudier la position de (C) par rapport à Δ.
4. Etudier les variations de f
5. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

CORRECTION

1. $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\frac{-1}{1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$ donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$

3. Etudions la position de (C) par rapport à Δ.

$$f(x)-2x = x+\sqrt{x^2+1}-2x = \sqrt{x^2+1}-x$$

On a $x^2+1 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq x$

Donc $\sqrt{x^2+1}-x \geq 0$

La courbe $\mathscr{C}$ est en permanence au dessus de l'asymptote Δ.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ $f'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$