

Exercices corrigés : Intégration par une primitive.**Exercice**

Calculer les intégrales suivant en utilisant une primitives

a) $\int_{-1}^1 e^{3x+4} dx$

b) $\int_0^{-1} xe^{x^2-1} dx$

c) $\int_{-1}^0 u\sqrt{u^2+1} du$

d) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

e) $\int_{-1}^1 (t+1)(t^2+2t-1) dt$

f) $\int_1^4 \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2} dx$

g) $\int_1^2 \frac{t^3+1}{t^4+4t+1} dt$

h) $\int_{-1}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

i) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

j) $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$

k) $\int_0^2 \sqrt{2x+1} dx$

l) $\int_{-1}^0 \frac{3x}{(x^2+1)^3} dx$

m) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

n) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

o) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

p) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin 2t}{\cos 2t} dt$

q) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt$

Corrigé des exercices

Pour déterminer la primitive d'une expression, il faut toujours chercher la forme usuelle à laquelle elle peut se ramener

$$a) \int_{-1}^1 e^{3x+4} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \times 3e^{3x+4} dx = \frac{1}{3} [e^{3x+4}]_{-1}^1 = \frac{1}{3}(e^7 - e)$$

la forme usuelle identifiée ici est $u'e''$ dont une primitive est e''

$$\int_{-1}^1 e^{3x+4} dx = \frac{1}{3}(e^7 - e)$$

$$b) \int_0^{-1} xe^{x^2-1} dx = \int_0^{-1} \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} \right]_0^{-1} = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-1}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

la forme usuelle identifiée ici est $u'e''$ dont une primitive est e''

$$\int_0^{-1} xe^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$c) \int_{-1}^0 u\sqrt{u^2+1} du = \int_{-1}^0 u(u^2+1)^{\frac{1}{2}} du = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} \times 2u(u^2+1)^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[\frac{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{3} \left[(u^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} (1^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3} (1 - 2\sqrt{2})$$

$$\int_{-1}^0 u\sqrt{u^2+1} du = \frac{1}{3} (1 - 2\sqrt{2})$$

$$d) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^4 \frac{1}{2} \times \frac{2dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^4 \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{3} \left[(2x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^4 = -\frac{1}{3} \left[\sqrt{2x+1} \right]_0^4 = -\frac{1}{3} (\sqrt{9} - \sqrt{1}) = -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_0^2 (t+1)(t^2+2t-1) dt &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \times 2(t+1)(t^2+2t-1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(t^2+2t-1)^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(t^2+2t-1)^2 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left[(4+4-1)^2 - (-1)^2 \right] = \frac{49-1}{4} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (t+1)(t^2+2t-1) dt = 12$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_1^4 \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2} dx &= \int_1^4 \left(x+2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln x + \frac{1}{x} \right]_1^4 \\ &= 8+8+4 \ln 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{51}{4} + 4 \ln 4 \end{aligned}$$

$$\int_1^4 \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2} dx = \frac{51}{4} + 4 \ln 4$$

$$\text{g) } \int_1^2 \frac{t^3+1}{t^4+4t+1} dt = \int_1^2 \frac{1}{4} \times \frac{4(t^3+1)}{t^4+4t+1} dt = \frac{1}{4} \times \int_1^2 \frac{4(t^3+1)}{t^4+4t+1} dt = \frac{1}{4} \left[\ln(t^4+4t+1) \right]_1^2$$

la forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = t^4 + 4t + 1$

$$= \frac{1}{4} \ln(16+8+1) - \frac{1}{4} \ln 6 = \frac{1}{4} \ln 25 - \frac{1}{4} \ln 6 = \frac{1}{4} \ln \frac{25}{6}$$

$$\int_1^2 \frac{t^3+1}{t^4+4t+1} dt = \frac{1}{4} \ln \frac{25}{6}$$

$$\text{h) } \int_{-1}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \left[\ln(e^x + e^{-x}) \right]_{-1}^0 = \ln 2 - \ln(e^{-1} + e)$$

la forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = e^x + e^{-x}$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln 2 - \ln(e^{-1} + e)$$

$$i) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e^1) = \ln 2 - \ln 1$$

La forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = \ln x$

on rappelle que $\ln e^x = x$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2$$

$$j) \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\underbrace{\ln \frac{1}{2}}_{<0}\right) - \ln(\ln e^1)$$

Cette intégrale ne peut être calculer et n'existe pas

$$k) \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

La forme usuelle identifiée ici est $u'u^r$ dont une primitive est $\frac{u^{r+1}}{r+1}$, $u = 2x+1$,

$$r = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

$$\int_0^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

$$l) \int_{-1}^0 \frac{3x}{(x^2+1)^3} dx = \int_{-1}^0 \frac{\frac{3}{2} \times 2x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx = -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{(3-1)(x^2+1)^{3-1}} \right]_{-1}^0$$

La forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u^n}$ dont une primitive est $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$, $u = x^2 + 1$, $n = 3$

$$= -\frac{3}{4} \left[(x^2+1)^{-2} \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{4} (1^{-2} - 2^{-2}) = -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{3x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{9}{16}$$

$$m) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^1 = 1 + \ln(1+e) - 0 + \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$$

$$n) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1 - \sqrt{3}$$

$$o) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) - \ln(\cos 0) = \ln \frac{1}{2} - \ln 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = -\ln 2$$

$$p) \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin 2t}{\cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2 \sin t \cos t}{\cos t} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin t dt = -2 \left[\cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^0 = -2 \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin 2t}{\cos t} dt = -2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - 2$$

$$\begin{aligned} \text{q) } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = \left[\tan x - x \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \\ &= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 1$$

Par :

Nkeuna Ngueliako georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala -
Cameroun