Exercices corrigés : Intégration par une primitive.

Exercice

Calculer les intégrales suivant en utilisant une primitives

a) $\int_{-1}^{1} e^{3x+4}dx$

b) $\int_{0}^{-1} xe^{x^2-1}dx$

c) $\int_{-1}^{0} u\sqrt{u^2+1}du$

d) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}dx$

e) $\int_{-1}^{1} (t+1)\left(t^2+2t-1\right)dt$

f) $\int_{1}^{4} \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2}dx$

g) $\int_{1}^{2} \frac{t^3+1}{t^4+4t+1}dt$

h) $\int_{-1}^{0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

i) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

j) $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

k) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x+1}dx$

l) $\int_{-1}^{0} \frac{3x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

m) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^x}dx$

n) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

o) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan xdx$

p) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin 2t}{\cos 2t}dt$

q) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^2 tdt$

Corrigé des exercices

Pour déterminer la primitive d’une expression, il faut toujours chercher la forme usuelle à laquelle elle peut se ramener

a) $\int_{-1}^{1} e^{3x+4}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{3}\times 3e^{3x+4}dx = \frac{1}{3}\left[e^{3x+4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\left(e^{7}-e\right)$

la forme usuelle identifiée ici est $u'e^{u}$ dont une primitive est e^{u}

$$\boxed{\int_{-1}^{1} e^{3x+4}dx = \frac{1}{3}\left(e^{7}-e\right)}$$

b) $\int_{0}^{-1} xe^{x^2-1}dx = \int_{0}^{-1}\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

la forme usuelle identifiée ici est $u'e^{u}$ dont une primitive est e^{u}

$$\boxed{\int_{0}^{-1} xe^{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

c) $\int_{-1}^{0} u\sqrt{u^2+1}du = \int_{-1}^{0} u\left(u^2+1\right)^{1/2}du = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\times 2u\left(u^2+1\right)^{1/2}du = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(u^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(u^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\left(1^{3/2}-2^{3/2}\right) = \frac{1}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^{0} u\sqrt{u^2+1}du = \frac{1}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right)}$$

d) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_{0}^{4}\frac{1}{2}\times\frac{2dx}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_{0}^{4}\frac{1}{2}\times 2\left(2x+1\right)^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(2x+1\right)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{0}^{4}$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(2x+1\right)^{1/2}\right]_{0}^{4} = -\frac{1}{3}\left[\sqrt{2x+1}\right]_{0}^{4} = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}dx = -\frac{2}{3}}$$

e) $\int_0^2 (t+1)\left(t^2+2t-1\right)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\times 2(t+1)\left(t^2+2t-1\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(t^2+2t-1\right)^2}{2}\right]_0^2$

$= \frac{1}{4}\left[\left(t^2+2t-1\right)^2\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left[\left(4+4-1\right)^2-\left(-1\right)^2\right] = \frac{49-1}{4}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (t+1)\left(t^2+2t-1\right)dt = 12}$$

f) $\int_1^4 \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2}dx = \int_1^4\left(x+2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x+4\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^4$

$= 8+8+4\ln 4+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2-1 = \frac{51}{4}+4\ln 4$

$$\boxed{\int_1^4 \frac{x^3+2x^2+4x-1}{x^2}dx = \frac{51}{4}+4\ln 4}$$

g) $\int_1^2 \frac{t^3+1}{t^4+4t+1}dt = \int_1^2 \frac{1}{4}\times\frac{4\left(t^3+1\right)}{t^4+4t+1}dt = \frac{1}{4}\times\int_1^2 \frac{4\left(t^3+1\right)}{t^4+4t+1}dt = \frac{1}{4}\left[\ln\left(t^4+4t+1\right)\right]_1^2$

la forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = t^4+4t+1$

$= \frac{1}{4}\ln\left(16+8+1\right)-\frac{1}{4}\ln 6 = \frac{1}{4}\ln 25-\frac{1}{4}\ln 6 = \frac{1}{4}\ln\frac{25}{6}$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{t^3+1}{t^4+4t+1}dt = \frac{1}{4}\ln\frac{25}{6}}$$

h) $\int_{-1}^0 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \left[\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\right]_{-1}^0 = \ln 2-\ln\left(e^{-1}+e\right)$

la forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = e^x+e^{-x}$

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln 2-\ln\left(e^{-1}+e\right)}$$

i) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln\left(\ln e^2\right) - \ln\left(\ln e^1\right) = \ln 2 - \ln 1$

La forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$, $u = \ln x$

on rappelle que $\ln e^x = x$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln 2$$

j) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = [\ln(\ln x)]_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} = \ln\underbrace{\left(\ln\frac{1}{2}\right)}_{<0} - \ln\left(\ln e^1\right)$

Cette intégrale ne peut être calculer et n'existe pas

k) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\times 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

La forme usuelle identifiée ici est $u'u^r$ dont une primitive est $\frac{u^{r+1}}{r+1}$, $u = 2x+1$,

$r = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

$$\int_0^2 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

l) $\int_{-1}^{0}\frac{3x}{(x^2+1)^3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{\frac{3}{2}\times 2x}{(x^2+1)^3}dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^3}dx=-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(3-1)(x^2+1)^{3-1}}\right]_{-1}^{0}$

La forme usuelle identifiée ici est $\frac{u'}{u^n}$ dont une primitive est $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$, $u=x^2+1$, $n=3$

$$=-\frac{3}{4}\left[(x^2+1)^{-2}\right]_{-1}^{0}=-\frac{3}{4}\left(1^{-2}-2^{-2}\right)=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{3x}{(x^2+1)^3}dx=\frac{9}{16}$$

m) $\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^1=1+\ln(1+e)-0+\ln 2$

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=1+\ln 2-\ln(1+e)$$

n) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}=1-\sqrt{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=1-\sqrt{3}$$

o) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)=\ln\frac{1}{2}-\ln 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx=-\ln 2$$

p) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin 2t}{\cos t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{2\sin t\cos t}{\cos t}dt=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin t dt=-2\left[\cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0}=-2\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin 2t}{\cos t}dt=-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-2$$

q) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = \left[\tan x - x \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 1$$

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 1}$$

Par :
Nkeuna Ngueliako georges
PLEG – Informaticien
Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun