

**EXERCICES CORRIGES : LIMITES ET CONTINUITÉ**

objectifs	Mise en œuvre de la continuité
Date	23 décembre 2016

**EXERCICE**

Montrer que tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois dans  $\mathbb{R}$

**CORRECTION**

Soit  $P$ , une fonction polynôme définie dans  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$n$ , le degré de  $P$  est impair.

- $P$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme toute fonction polynôme.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$
- Ce calcul des limites en l'infini montre que l'image de  $\mathbb{R}$  par  $P$  est  $\mathbb{R}$ , qui contient le réel 0.
- En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on a  $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et  $0 \in \mathbb{R}$ , donc 0 admet au moins un antécédent dans  $\mathbb{R}$ . L'équation  $P(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .