EXERCICES CORRIGES : LIMITES ET CONTINUITE	
objectifs	Mise en œuvre de la continuité
Date	23 décembre 2016

EXERCICE

Soit f une fonction continue de l'intervalle $[0;1]$ dans l'intervalle $[0;1]$. Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un nombre α dans l'intervalle $[0;1]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

CORRECTION

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x)=f(x)-x$.

g est continue sur $[0;1]$ car f l'est.

$g(0)=f(0)-0=f(0)$ et $g(1)=f(1)-1$

Puis que f une fonction continue de l'intervalle $[0;1]$ dans l'intervalle $[0;1]$,

$f(1)\leq 1 \Rightarrow f(1)-1\leq 0 \Rightarrow g(1)\leq 0$

En outre $g(0)=f(0)$ et $f(0)\in[0;1] \Rightarrow f(0)\geq 0$ et $g(0)\geq 0$

Finalement, $g(0)\times g(1)\leq 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 admet un antécédent par g dans $[0;1]$, notons le α

$g(\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)-\alpha=0 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha$

Conclusion α est un point fixe de f