EXERCICES CORRIGES : LIMITES ET CONTINUITE	
objectifs	Comparaison au voisinage l'infini

Exercices

1. Montrer que la fonction $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$ est bornée
2. Déduisez les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

Correction

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin x\le 2$

$$\Rightarrow 3-2\le 3+2\sin x\le 5$$
$$\Rightarrow 1\le 3+2\sin x\le 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\sin x}\le 1$$

Donc la fonction $\dfrac{1}{3+2\sin x}$ est bornée

2. Déduisons les limites

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}$

On a $\Rightarrow \dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+2\sin x}\le 1$, puisque x^2 est positif, on multiplie chaque membre de l'inégalité par x^2, l'ordre ne change pas.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5}\le\frac{x^2}{3+2\sin x}\le x^2$$

Conclusion $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

On a $\Rightarrow \dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+2\sin x}\le 1$, puisque $x+\sin x$ est négatif, on multiplie chaque membre de l'inégalité par $x+\sin x$, l'ordre change.

On a donc $x+\sin x\le\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\le x+\sin x$, donc Conclusion $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}=-\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sin x}{5}=-\infty$