EXERCICES CORRIGES : LIMITES ET CONTINUITE	
objectifs	Résolution d'équations
Date	21 décembre 2016

Exercice

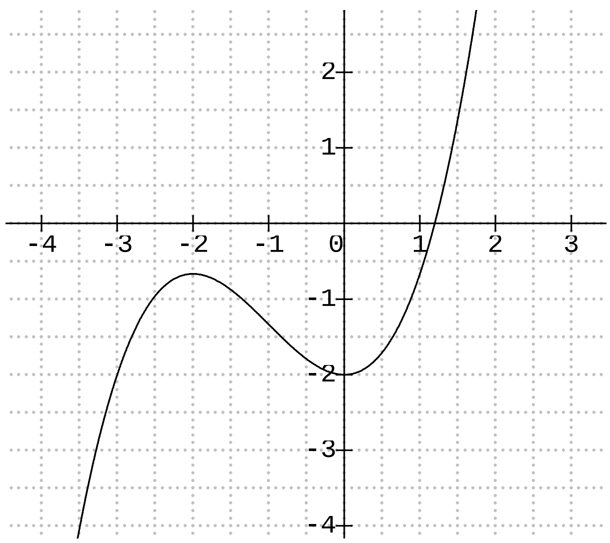
1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ et tracer ca courbe représentative (C)
2. En déduire que l'équation $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2 = 0$ admet une unique solution réelle.
3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.

Corrigé

1. Etudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x = x^2 + 2x = x(x+2)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- 

2. Déduisons que l'équation $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2 = 0$ admet une unique solution réelle.

Tout est dans le tableau de variation. On se rend compte que :

- Dans l'intervalle $]-\infty;-2]$, la fonction croit de $-\infty$ à -2. Elle reste donc négative. (C) ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Dans l'intervalle $\left[-\frac{2}{3};-2\right]$, la fonction décroit de $-\frac{2}{3}$ à -2. Elle reste encore négative. (C) ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Dans l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction croit de -2 vers $+\infty$. Elle passe donc des valeurs négatives à des valeurs positives. (C) coupe donc l'axe des abscisses en un unique point appartenant à cet intervalle.

On peut aussi dire que : L'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ est l'intervalle $[-2;+\infty[$. E appliquant directement le théorème des valeurs intermédiaires, étant donné que 0 appartient à l'intervalle $[-2;+\infty[$, il admet donc un unique antécédent dans $[0;+\infty[$, la fonction étant strictement monotone.

3. Déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution

Application du théorème des valeurs intermédiaires.

$f(0) = -2$; $f(1) = -\frac{2}{3}$; $f(2) = \frac{14}{3}$

$f(1) \times f(2) < 0$, donc la solution de l'équation $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2 = 0$ est dans l'intervalle, $]1;2[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On a un premier encadrement $1 < \alpha < 2$.

utilisons à présent la méthode par balayage pour donner un encadrement de la solution à 10^{-3}.

Nous nous servons du tableur Excel pour les calculs.

TABLEAU N°1 : précisions 10^{-1}										
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	-0,67	-0,35	0,02	0,42	0,87	1,38	1,93	2,53	3,18	3,90	4,67

D'après ce tableau, $f(1{,}1) \times f(1{,}2) < 0$, on a un second encadrement à 10^{-1} près : $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$

Passons au deuxième tableau avec une précision de 10^{-2}. Pour cela, nous divisons l'intervalle $]1,1;1,2[$ en 10

TABLEAU N°2: précisions 10^{-2}										
1,1	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,2
-0,35	-0,31	-0,28	-0,24	-0,21	-0,17	-0,13	-0,10	-0,06	-0,02	0,02

D'après ce tableau, $f(1,19)\times f(1,20)<0$, on a un second encadrement à 10^{-1} près : $1,19<\alpha<1,20$

Passons au troisième et dernier tableau avec enfin une précision de 10^{-3}. Pour cela, nous divisons l'intervalle $]1,19;1,20[$ en 10

TABLEAU N°3: précisions 10^{-3}										
1,19	1,191	1,192	1,193	1,194	1,195	1,196	1,197	1,198	1,199	1,2
-0,0222	-0,0184	-0,0146	-0,0108	-0,007	-0,003	0,00068	0,0045	0,00833	0,0122	0,016

D'après ce tableau, $f(1,195)\times f(1,196)<0$, on a un second encadrement à 10^{-1} près : $1,195<\alpha<1,196$

Pour donner une valeur approchée de la solution, on peut prendre la moyenne de 1,195 et 1,196

$$\alpha=\frac{1,195+1,196}{2},\ \alpha\approx 1,1955$$

Nkeuna Ngueliako georges
PLEG/Ingénieur des travaux
Douala – Cameroun
www.doualamaths.net- ngueliako@yahoo.fr