Exercices corrigés.

Décomposer les expressions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

c) $\dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}$

d) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$

Résolution

La décomposition d'une expression rationnelle $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ dépend des degrés des polynômes $A(x)$ et $B(x)$

Nous avons donc deux cas

Premier cas $d°A(x) > d°B(x)$: le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur

On effectue la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Dans cette division, $Q(x)$ est le quotient, $R(x)$ est le quotient et $d°R(x) < d°B(x)$

On obtient $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ et $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

Exemple : décomposer $\dfrac{3x^2-5x+7}{x+2}$

Effectuons la division euclidienne de $3x^2-5x+7$ par $x+2$:

$$\begin{array}{l|l} 3x^2-5x+7 & x+2 \\ \hline 29 & 3x-11 \end{array}$$

Le quotient est $3x-11$ et le reste 29

On obtient : $3x^2-5x+7 = (x+2)(3x-11)+29$, donc

$$\frac{3x^2-5x+7}{x+2} = \frac{(x+2)(3x-11)+29}{x+2} = \frac{(x+2)(3x-11)}{x+2} + \frac{29}{x+2} = 3x-11+\frac{29}{x+2}$$

Finalement

$$\frac{3x^2-5x+7}{x+2} = 3x-11+\frac{29}{x+2}$$

Deuxième cas $d°A(x) < d°B(x)$: le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur

Dans ce cas, la décomposition de $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ dépend de la forme du numérateur, et si le dénominateur admet des racines ou pas.

N°	Forme	Décomposition α_i est un nombre réel
a)	$\dfrac{A(x)}{(x-a)(x-b)}$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)}+\dfrac{\alpha_2}{(x-b)}$
b)	$\dfrac{A(x)}{(x-a)^2(x-b)}$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)}+\dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}+\dfrac{\alpha_3}{(x-b)}$
c)	$\dfrac{A(x)}{(x-a)^3(x-b)}$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)}+\dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}+\dfrac{\alpha_3}{(x-b)^3}+\dfrac{\alpha_4}{(x-b)}$
d)	$\dfrac{A(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)}+\dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}+\dfrac{\alpha_3}{(x-b)}+\dfrac{\alpha_4}{(x-b)^2}$
e)	$\dfrac{A(x)}{(x-a)\,p(x)}$ ($p(x)$, polynôme de degré 2 n'admettant pas de racines : $\Delta<0$)	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)}+\dfrac{\alpha x+\beta}{p(x)}$ α , β sont des réels

Exemples

Décomposons quelques cas

Exemple 1 : $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{\alpha_1}{(x-1)}+\frac{\alpha_2}{(x-2)}$$

La méthode

- Pour déterminer α_1, je multiplie cette égalité par $(x-1)$ et je prends $x=1$
- Pour déterminer α_2, je multiplie cette égalité par $(x-2)$ et je prends $x=2$

Allons y :

- Pour α_1 $\dfrac{1}{(x-2)}=\alpha_1+\dfrac{(x-1)\alpha_2}{(x-2)}$, pour $x=1$, on obtient $\alpha_1=\dfrac{1}{1-2}=-1$
- Pour α_2 $\dfrac{1}{(x-1)}=\dfrac{(x-2)\alpha_1}{(x-1)}+\alpha_2$, pour $x=2$, on obtient $\alpha_2=\dfrac{1}{2-1}=1$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}$$

Exemple 2 : $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{\alpha_1}{(x+1)}+\frac{\alpha_2}{(x+2)}+\frac{\alpha_3}{(x-3)}$$

- Pour α_1 $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x+3)}=\alpha_1+\dfrac{(x+1)\alpha_2}{(x+2)}+\dfrac{(x+1)\alpha_3}{(x+3)}$, pour $x=-1$, on obtient

  $\alpha_1=\dfrac{-2+1}{(-1+2)(-1+3)}=-\dfrac{1}{2}$
- Pour α_2 $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{(x+2)\alpha_1}{(x+1)}+\alpha_2+\dfrac{(x+2)\alpha_3}{(x-3)}$, pour $x=-2$, on obtient

  $\alpha_2=\dfrac{-4+1}{(-2+1)(-2-3)}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$

- Pour α_3 $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x-3)\alpha_1}{(x+1)}+\dfrac{(x-3)\alpha_2}{(x+2)}+\alpha_3$, pour $x=3$, on obtient

  $\alpha_3=\dfrac{7}{(3+1)(3+2)}=\dfrac{7}{20}$

Exemple 3 : $\dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}$

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{\alpha_1}{(x-2)}+\frac{\alpha_2}{(x-2)^2}+\frac{\alpha_3}{(x-1)}$$

Pour ce cas, nous allons commencer par déterminer α_2, par le même procédé

$\dfrac{3x-5}{(x-1)}=(x-2)\alpha_1+\alpha_2+\dfrac{(x-2)^2\alpha_3}{(x-1)}$ pour $x=2$, on obtient $\alpha_2=\dfrac{3x-5}{(x-1)}=\dfrac{6-5}{2-1}=1$

Déterminons ensuite α_3

$\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)\alpha_1}{(x-2)}+\dfrac{(x-1)\alpha_2}{(x-2)^2}+\alpha_3$ pour $x=1$, on obtient $\alpha_3=\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2$

Déterminons pour terminer α_1

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{\alpha_1}{(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{(x-1)}$$

$$\frac{\alpha_1}{(x-2)}\Rightarrow\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-1)}=\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$=\frac{3x-5-(x-1)+2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{3x-5-x+1+2x^2-8x+8}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{2x^2-4x+4}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{2x^2-6x+4}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-6x+4}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{2(x-2)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{2}{x-2}$$

Donc $\alpha_2=2$

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{(x-1)}$$

Exemple 4 : $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$

D'après ce que nous avons indiqué précédemment, $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$

Nous allons déterminer simplement les constantes
Déterminons a. Multiplions par $x+1$ et prenons $x=-1$

$$\frac{x}{x^2+x+1}=a+\frac{(x+1)(\alpha x+\beta)}{x^2+x+1}$$

Pour x = -1 on a
$a=-1$

on a donc par $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}\Rightarrow\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{x+1}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$$

calculons : $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{x+1}$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{x+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Par identification $\alpha=\beta=1$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Par :

Nkeuna Ngueliako georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun