

Exercices corrigés.

Décomposer les expressions rationnelles suivantes.

$$a) \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$b) \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$c) \frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$d) \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Résolution

La décomposition d'une expression rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ dépend des degrés des polynômes $A(x)$ et $B(x)$

Nous avons donc deux cas

Premier cas $d^\circ A(x) > d^\circ B(x)$: le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur

On effectue la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$

$$A(x) \quad | \quad B(x)$$

$$R(x) \quad Q(x)$$

Dans cette division, $Q(x)$ est le quotient, $R(x)$ est le reste et $d^\circ R(x) < d^\circ B(x)$

$$\text{On obtient } A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \text{ et } \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\text{Exemple : décomposer } \frac{3x^2 - 5x + 7}{x + 2}$$

Effectuons la division euclidienne de $3x^2 - 5x + 7$ par $x + 2$:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 7 \quad | \quad x + 2 \\ 29 \qquad \qquad 3x - 11 \end{array}$$

Le quotient est $3x - 11$ et le reste 29

On obtient : $3x^2 - 5x + 7 = (x + 2)(3x - 11) + 29$, donc

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x + 2} = \frac{(x + 2)(3x - 11) + 29}{x + 2} = \frac{(x + 2)(3x - 11)}{x + 2} + \frac{29}{x + 2} = 3x - 11 + \frac{29}{x + 2}$$

Finalement

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x + 2} = 3x - 11 + \frac{29}{x + 2}$$

Deuxième cas $d^\circ A(x) < d^\circ B(x)$: le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur

Dans ce cas, la décomposition de $\frac{A(x)}{B(x)}$ dépend de la forme du numérateur, et si le dénominateur admet des racines ou pas.

N°	Forme	Décomposition α_i est un nombre réel
a)	$\frac{A(x)}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-b)}$
b)	$\frac{A(x)}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-b)}$
c)	$\frac{A(x)}{(x-a)^3(x-b)}$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-b)^3} + \frac{\alpha_4}{(x-b)}$
d)	$\frac{A(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}$	$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-b)} + \frac{\alpha_4}{(x-b)^2}$
e)	$\frac{A(x)}{(x-a)p(x)}$ ($p(x)$, polynôme de degré 2 n'admettant pas de racines : $\Delta < 0$)	$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha x + \beta}{p(x)}$ α, β sont des réels

Exemples

Décomposons quelques cas

Exemple 1 : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha_1}{(x-1)} + \frac{\alpha_2}{(x-2)}$$

La méthode

- Pour déterminer α_1 , je multiplie cette égalité par $(x-1)$ et je prends $x=1$
- Pour déterminer α_2 , je multiplie cette égalité par $(x-2)$ et je prends $x=2$

Allons y :

- Pour α_1 $\frac{1}{(x-2)} = \alpha_1 + \frac{(x-1)\alpha_2}{(x-2)}$, pour $x=1$, on obtient $\alpha_1 = \frac{1}{1-2} = -1$

- Pour α_2 $\frac{1}{(x-1)} = \frac{(x-2)\alpha_1}{(x-1)} + \alpha_2$, pour $x=2$, on obtient $\alpha_2 = \frac{1}{2-1} = 1$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)}$$

Exemple 2 : $\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{\alpha_1}{(x+1)} + \frac{\alpha_2}{(x+2)} + \frac{\alpha_3}{(x-3)}$$

- Pour α_1 $\frac{2x+1}{(x+2)(x+3)} = \alpha_1 + \frac{(x+1)\alpha_2}{(x+2)} + \frac{(x+1)\alpha_3}{(x+3)}$, pour $x=-1$, on obtient

$$\alpha_1 = \frac{-2+1}{(-1+2)(-1+3)} = -\frac{1}{2}$$

- Pour α_2 $\frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+2)\alpha_1}{(x+1)} + \alpha_2 + \frac{(x+2)\alpha_3}{(x-3)}$, pour $x=-2$, on obtient

$$\alpha_2 = \frac{-4+1}{(-2+1)(-2-3)} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

• Pour α_3 $\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)\alpha_1}{(x+1)} + \frac{(x-3)\alpha_2}{(x+2)} + \alpha_3$, pour $x=3$, on obtient

$$\alpha_3 = \frac{7}{(3+1)(3+2)} = \frac{7}{20}$$

Exemple 3 : $\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)}$

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{\alpha_1}{(x-2)} + \frac{\alpha_2}{(x-2)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-1)}$$

Pour ce cas, nous allons commencer par déterminer α_2 , par le même procédé

$$\frac{3x-5}{(x-1)} = (x-2)\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{(x-2)^2\alpha_3}{(x-1)} \text{ pour } x=2, \text{ on obtient } \alpha_2 = \frac{3x-5}{(x-1)} = \frac{6-5}{2-1} = 1$$

Déterminons ensuite α_3

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)\alpha_1}{(x-2)} + \frac{(x-1)\alpha_2}{(x-2)^2} + \alpha_3 \text{ pour } x=1, \text{ on obtient } \alpha_3 = \frac{3x-5}{(x-2)^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Déterminons pour terminer α_1

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{\alpha_1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-1)}$$

$$\frac{\alpha_1}{(x-2)} \Rightarrow \frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-1)} = \frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)} - \frac{(x-1)}{(x-2)^2(x-1)} + \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{3x-5-(x-1)+2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{3x-5-x+1+2x^2-8x+8}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{2x^2-4x+4}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{2x^2-6x+4}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-6x+4}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{2(x-2)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{2}{x-2}$$

Donc $\alpha_2 = 2$

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-1)}$$

Exemple 4 : $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$

D'après ce que nous avons indiqué précédemment, $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1}$

Nous allons déterminer simplement les constantes

Déterminons a. Multiplions par $x+1$ et prenons $x = -1$

$$\frac{x}{x^2+x+1} = a + \frac{(x+1)(\alpha x + \beta)}{x^2+x+1}$$

Pour $x = -1$ on a

$$a = -1$$

on a donc par $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1} \Rightarrow \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1}$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1}$$

calculons : $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Par identification $\alpha = \beta = 1$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Par :

Nkeuna Ngueliako georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala -

Cameroun