Exercices corrigés.

La suite $\left(u_n\right)$ est définie par : $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Exprimez u_n en fonction de n

Résolution

Quelques précisions

Une telle suite est dite suite définie par une récurrence double. Il s'agit d'une relation de récurrence liant un terme à ses deux prédécesseurs. Pour une récurrence double, on a toujours besoin des deux premiers termes.

Chaque terme se calcule à partir de ses deux prédécesseurs.

Propriété

L'ensemble des suites définies par une telle formule de récurrence est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques. Ce sous espace vectoriel est engendré par deux suites géométriques.

Pour faire simple, une suite définie par une formule de récurrence double de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ aura toujours comme formule explicite $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$

- α et β sont deux nombres réels ou complexes calculés à partir des deux termes de la suite connus.
- q_1 et q_2 sont deux nombres réels ou complexes calculés à partir de la formule de récurence.

De façon pratique.

Exemple 1

Supposons que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique, de raison q

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \Rightarrow q^{n+2} = 2q^{n+1} - q^n$$

En divisant par on obtient $q^2 = 2q - 1$

Soit $q^2 - 2q + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double $q = 1$

Etant donné que les deux raison valent 1, notre suite est arithmétique, de la forme $u_n = an + b$

Déterminons a et b à partir des deux premier termes de la suite.

$$u_0 = 1 \Rightarrow 1 \times a + b = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$u_2 = 3 \Rightarrow 2 \times a + b = 3$$

Finalement on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases}$

La formule explicite de la suite est donc : $u_n = 2n-1$

La simulation ci – dessous sous Excel montre bien que la formule explicite est exacte.

$\boxed{n}$	$u_n = 2n-1$	$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
1	1	1
2	3	3
3	5	5
4	7	7
5	9	9
6	11	11
7	13	13
8	15	15
9	17	17
10	19	19
11	21	21
12	23	23
13	25	25
14	27	27
15	29	29
16	31	31
17	33	33
18	35	35
19	37	37
20	39	39

Exemple 1

La suite est définie par $\begin{cases} u_1 = 4; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Comme précédemment, si on suppose que la suite (u_n) est géométrique, on a $q^2 = 5q-6$

Soit $q^2 - 5q + 6 = 0$

Les racines de l'équation sont donc 2 et 3.

La formule explicite de la suite est donc : $u_n = a \times 2^n + b \times 3^n$ a et b à déterminer en fonction des deux termes donnés.

Déterminons a et b

On a $u_1 = 4 \Rightarrow 2a + 3b = 4$ et $u_2 = 2 \Rightarrow 4a + 9b = 2$

On obtient le système $\begin{cases} 2a+3b=4 \\ 4a+9b=2 \end{cases}$

La résolution du système donne a=5 et b=-2

Finalement, la formule explicite de la suite est : $u_n = 5\times 2^n - 2\times 3^n$

n	recurrence	explicite
1	4	4
2	2	2
3	-14	-14
4	-82	-82
5	-326	-326
6	-1138	-1138
7	-3734	-3734
8	-11842	-11842
9	-36806	-36806
10	-112978	-112978
11	-344054	-344054
12	-1042402	-1042402
13	-3147686	-3147686
14	-9484018	-9484018
15	-28533974	-28533974
16	-85765762	-85765762
17	-257624966	-257624966
18	-773530258	-773530258
19	-2321901494	-2321901494
20	-6968325922	-6968325922

Par :

Nkeuna Ngueliako Georges

PLEG – Informaticien

Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun