Exercices corrigés.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ et pour $n \geq 2$, $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$

Calculer u_n pour tout entier.

Résolution

Il s'agit d'une récurrence double, notion déjà abordée.

$$q^n - 2\cos\theta q^{n-1} + q^{n-2} = 0 \Rightarrow q^{n+2} - 2\cos\theta q^{n+1} + q^n = 0 \Rightarrow q^2 - 2\cos\theta q + 1 = 0$$

Soit l'équation $q^2 - 2\cos\theta q + 1 = 0$

Calculons le discriminant.

$$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = 4\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 4\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -8\sin^2\frac{\theta}{2} = \left(2\sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

Les deux solutions de l'équation sont :

$$q_1 = \frac{2\cos\theta - 2\sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \cos\theta - \sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$q_2 = \frac{2\cos\theta + 2\sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \cos\theta + \sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}$$

L'expression de u_n est $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n = \alpha\left(\cos\theta - \sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n + \beta\left(\cos\theta + \sqrt{2}i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$

Les nombres α, β sont à déterminer.

$u_0 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$

$u_1 = \cos\theta \Rightarrow \alpha q_1 + \beta q_2 = \cos\theta$

On obtient le système $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 = \cos\theta \end{cases}$

La résolution de ce système donne $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$

Finalement $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\cos\theta - \sqrt{2}i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(\cos\theta + \sqrt{2}i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^n$

Par :
Nkeuna Ngueliako Georges
PLEG – Informaticien
Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun