Exercices corrigés.

La suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par : $\begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1} \end{cases}$

Démontrer que pour tout n, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$

Résolution

La suite est la somme de deux suites géométriques. Déterminons les raisons q_1 et q_2

On a $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1} \Rightarrow q^{n+1} = 4q^n - 3q^{n-1} \Rightarrow q^2 = 4q - 3 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$

Les solutions de l'équation sont : $q_1 = 3$ et $q_2 = 1$

Pour tout n, $u_n = \alpha \times 3^n + \beta \times 1^n = \alpha \times 3^n + \beta$, α, β à déterminer en fonction de u_0 et u_1.

$u_0 = 0 \Rightarrow \alpha \times 3^0 + \beta \times 1^0 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$

$u_1 = 1 \Rightarrow \alpha \times 3^1 + \beta \times 1^1 = 1 \Rightarrow 3\alpha + \beta = 1$

On obtient le système $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$

La résolution donne $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = -\dfrac{1}{2}$

Finalement, on écrit $u_n = \alpha \times 3^n + \beta \times 1^n = \dfrac{1}{2} \times 3^n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

$$\boxed{u_n = \frac{3^n - 1}{2}}$$

Par :
Nkeuna Ngueliako Georges
PLEG – Informaticien
Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville Douala - Cameroun