MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
25.11.2016	EXAMEN	SEQUENCE N° 2	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	CORRIGE MATHEMATIQUES		Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 2,5 points

1. **Montrons que** $6^{40}-1$ **est divisible par** 55.

Nous avons : $55=5\times 11$ et comme 5 et 11 sont premiers entre eux, alors $6^{40}-1$ est divisible par 55 s'il est à la fois divisible par 5 et par 11.

Or $6\equiv 1[5]$, donc $6^{40}\equiv 1[5]$, c'est-à-dire $6^{40}-1\equiv 0[5]$ (i)

Par ailleurs, $6^5\equiv -1[11]$ et comme $6^{40}=6^{5\times 8}=\left(6^5\right)^8$, alors $6^{40}\equiv(-1)^8[11]$ c'est-à-dire $6^{40}-1\equiv 0[11]$. (ii)

De (i) et (ii), il en découle que $6^{40}-1$ est divisible par 55. **0,75pt**

2. **Montrons que** $\forall n\in\mathbb{N}^*, (x+1)^n-nx-1$ **est divisible par** x^2.

Procédons par raisonnement par récurrence sur n.

Soit la propriété (P_n) : « $\forall n\in\mathbb{N}^*, x^2/(x+1)^n-nx-1$ »

Pour $n=1$, on a : $(x+1)^1-x-1=0=0\times x^2$, donc $x^2/0$. Ainsi (P_1) est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $x^2/(x+1)^n-nx-1$ et montrons qu'alors : $x^2/(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1$.

Nous avons :
$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1&=(x+1)^n(x+1)-nx-x-1\\&=(x+1)\left[(x+1)^n-nx-1\right]+(x+1)(nx+1)-(n+1)x-1\\&=(x+1)\left[(x+1)^n-nx-1\right]+nx^2\end{aligned}$$

D'après (P_n), $x^2/(x+1)^n-nx-1$ et comme x^2/nx^2, alors
$$x^2/(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1.$$

Ainsi, d'après le principe de raisonnement par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*, (x+1)^n-nx-1$ est divisible par x^2. **1pt**

Autre méthode : *utilisation de la formule du binôme de Newton.* A vous de jouer !

3. **Déterminons les nombres premiers** p **tels que** p **divise** 8^p+20.

p étant un nombre premier , alors d'après le *petit théorème de* FERMAT, $p/8^p-8$.

On a : $p/8^p+20$ et $p/8^p-8$, donc $p/8^p+20-\left(8^p-8\right)$, c'est-à-dire $p/28$.

Or $D^+(28)=\{1,2,4,7,14,28\}$, donc $p\in\{2,7\}$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 3,75 points

1. Donnons l'écriture complexe de g.

Nous avons : $z' = x' + iy' = x + y - 1 + i(x - y + 3)$

$$= x + y - 1 + ix - iy + 3i$$

$$= x - iy + ix + y - 1 + 3i$$

$$= \bar{z} + i(x - iy) - 1 + 3i = \bar{z} + i\bar{z} - 1 + 3i$$

$$= (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$$

L'écriture complexe de g est $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i.$ **0,5pt**

2. Vérifions que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'_0}$

Nous avons : $M_0(2,-4)$ et comme $g(M_0) = M'_0$, alors $M'_0(-3,9)$. **0,5pt**

Or $\overrightarrow{AB}(4,1)$; $\overrightarrow{AM'_0}(-2,8)$ et comme $4\times(-2) + 1\times 8 = 0$, alors $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'_0}$.

3. (a) Démontrons que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow 5x + 3y = -2$.

Nous avons $\overrightarrow{AB}(4,1)$ et $\overrightarrow{AM'}(x+y, x-y+2)$; ceci étant :

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'} = 0$

$$\Leftrightarrow 4(x+y) + (x-y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + x - y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3y = -2.$$ **0,5pt**

(b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 5x + 3y = -2$.

On a $5\times 2 + 3\times(-4) = -2$, donc $(2;-4)$ est une solution particulière de (E).

Ainsi $\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 5\times 2 + 3(-4) = -2 \end{cases}$

En soustrayant ces égalités membre à membre on obtient $5(x-2) + 3(y+4) = 0$.

Ce qui donne : $5(x-2) = -3(y+4)$

Or 3 divise $-3(y+4)$, donc 3 divise $5(x-2)$ et comme 5 et 3 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de GAUSS, 3 divise $x-2$, par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 2 = 3k$; soit $x = 2 + 3k$.

Par suite, on en déduit que : $y = -4 - 5k$.

Finalement, $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2+3k, -4-5k), k \in \mathbb{Z}\}$. **1pt**

(c) Déduisons-en les points M dont les coordonnées sont des entiers de l'intervalle $[-6;6]$ tels que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'}$

On cherche les points $M_k(2+3k, -4-5k)$ avec $-6 \le 2 + 3k \le 6$ et $-6 \le -4 - 5k \le 6$

$-6 \leq 2+3k \leq 6 \Leftrightarrow -\dfrac{8}{3} \leq k \leq \dfrac{4}{3}$; $-6 \leq -4-5k \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq \dfrac{2}{5}$.

Ainsi $k \in \{-2,-1,0\}$.

Les points cherchés sont : $M_{-2}(-4,6); M_{-1}(-1,1)$ et $M_0(2;-4)$. **0,75pt**

4. Déterminons et construisons l'ensemble Γ.

$\arg\left((z+1-i)^3\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ est défini si $z \neq -1+i$, c'est-à-dire si $M \neq A$.

$$\begin{aligned}\arg\left((z+1-i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] &\Leftrightarrow 3\arg(z+1-i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg(z-z_A) = \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \quad ,k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \ ,k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

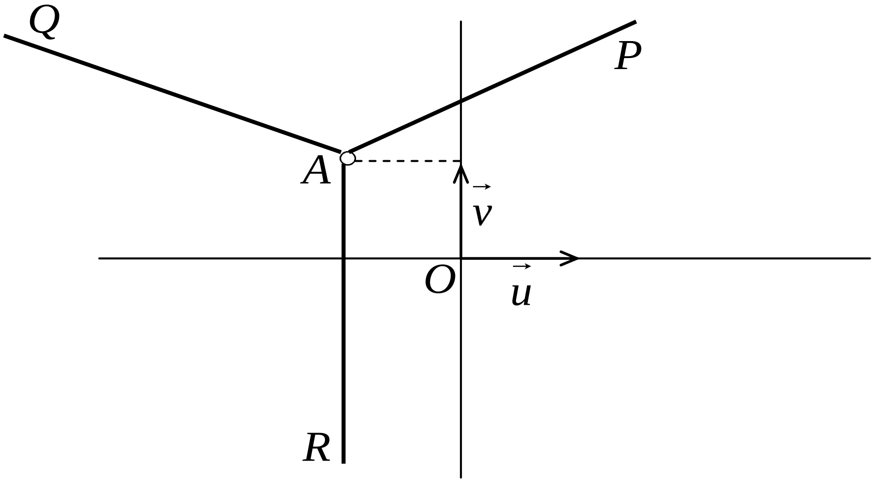
Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, **1pt**

si $k=3n$, $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$; si $k=3n+1$ alors $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

si $k=3n+2$, alors $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc Γ est la réunion des demi-droites $[AP)$, $[AQ)$ et $[AR)$ privées du point A

telles que : $\left(\vec{u},\overrightarrow{AP}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$; $\left(\vec{u},\overrightarrow{AQ}\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$; $\left(\vec{u},\overrightarrow{AR}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.



EXERCICE 3 : 3,25 points

1. Montrons que les points A, B et C définissent un plan (P).

Nous avons : $\overrightarrow{AB}(0,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,1,0)$

Or $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,2,2)$ et puisque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, alors les points A, B et C définissent un plan (P). **0,5pt**

2. Ecrivons une équation cartésienne du plan (P).

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)+2(y+1)+2(z-1)=0\\
&\Leftrightarrow x+2y+2z-1=0.
\end{aligned}
$$
0,5pt

3. Vérifions que $ABCD$ est un tétraèdre, puis calculons son volume.

Nous avons : $x_D+2y_D+2z_D-1=1-2+0-1=-2\neq 0$

Donc : $D\notin(ABC)$ et par conséquent $ABCD$ est un tétraèdre.

Soit $\mathscr{V}$ son volume. $\mathscr{V}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|u.v=\dfrac{1}{3}u.v$ **0,5pt**

4. (a) Montrons que (S) est une sphère. Précisons son centre I et son rayon r.

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(S) &: x^2+y^2+z^2+y-z-1=0\\
&\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2
\end{aligned}
$$

Ainsi (S) est une sphère de centre $I\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.$ **0,5pt**

(b) Vérifions que la sphère (S) est circonscrite au tétraèdre ABCD.

Il suffit de vérifier que $IA=IB=IC=ID=r.$ **0,5pt**

(c) Ecrivons une équation cartésienne du plan (Q) tangent à (S) en D.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a : $\overrightarrow{DM}(x-1,y+1,z)$

$$
\begin{aligned}
M\in(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{DI} &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DI}=0\\
&\Leftrightarrow -(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{2}z=0\\
&\Leftrightarrow 2x-y-z-3=0.
\end{aligned}
$$

Une équation cartésienne de (Q) est $2x-y-z-3=0.$ **0,75pt**

EXERCICE 4 : 4 points

1. Déterminons en fonction de z les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2.

M_1 étant le symétrique de M par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$, alors $z_1=\overline{z}.$ **0,5pt**

M_2 étant l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors $z_2=iz_1=i\overline{z}.$

2. Montrons que l'affixe z' de M' vérifie $z'=i\overline{z}+1-i.$

On a : $M'=t_{\vec{u}-\vec{v}}(M_2)$, donc $\overrightarrow{M_2M'}=\vec{u}-\vec{v}.$

Ce qui donne $z'-z_2=1-i$

C'est-à-dire $z'=z_2+1-i$ et comme $z_2=i\overline{z},$ on a bien : $z'=i\overline{z}+1-i.$ **0,5pt**

3. Montrons que Z est imaginaire pur ou nul.

Il suffit de montrer que $\overline{Z} = -Z$.

Nous avons : $\overline{Z} = \dfrac{i\overline{z}+1-i-\overline{z}}{1-i} = \dfrac{-iz+1+i-\overline{z}}{1-i} = \dfrac{-iz-i^2+i+i^2\overline{z}}{1-i}$

$$= \dfrac{i\left(i\overline{z}+1-i-z\right)}{1-i} = \dfrac{i\left(z'-z\right)}{1-i} = -\dfrac{z'-z}{1+i} = -Z.$$

Donc Z est imaginaire pur ou nul. **0,75pt**

4. (a) Déterminons l'ensemble Δ des points invariants par φ.

Soit $M\left(x,y\right)$ un point du plan. M est invariant par φ (ou point fixe) si $\varphi\left(M\right) = M$.

$\varphi\left(M\right) = M \Leftrightarrow x+iy = i\left(x-iy\right)+1-i$

$\Leftrightarrow x+iy = y+1+i\left(x-1\right)$

$\Leftrightarrow x-y-1=0$ par égalité de deux nombres complexes.

Ainsi, Δ est la droite d'équation $x-y-1=0$. **0,5pt**

(b) Déduisons-en que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à Δ.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = 1+i$.

Nous venons de voir à la question 3 que $\dfrac{z'-z}{1+i}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire $\dfrac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\vec{w}}}$ est imaginaire pur, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Ce qui prouve que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à Δ. **0,5pt**

(c) Exprimons en fonction de z, l'affixe du point I et vérifions que I $\in \Delta$.

I étant le milieu du segment $\left[MM'\right]$, $z_I = \dfrac{z'+z}{2} = \dfrac{i\overline{z}+1-i+z}{2}$

On vérifie aisément que : **0,75pt**

$I\left(\dfrac{x+y+1}{2}, \dfrac{x+y-1}{2}\right)$ et que : $\dfrac{x+y+1}{2} - \dfrac{x+y-1}{2} - 1 = 0$, donc $I \in \Delta$.

(d) Caractérisons alors l'application φ.

En vertu des questions précédentes, φ est une symétrie orthogonale d'axe Δ. **0,5pt**

EXERCICE 5 : 3,5 points

A) Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ par $f\left(x\right) = 1+\sin\left(\pi x\right)$.

1. Montrons que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

On a : $f\left(-0,5\right) = 0$ et $f\left(0,5\right) = 2$. f est continue et dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'\left(x\right) = \pi\cos\left(\pi x\right) > 0$; donc f est strictement croissante sur I.

Comme f est continue et strictement croissante sur I, alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$; donc $J = [0;2]$. **0,75pt**

2. (a) Déterminons $f^{-1}(1)$. **0,25pt**

On a : $f(0)=1$ et puisque f^{-1} est la fonction réciproque de f, alors $f^{-1}(1)=0$.

(b) Montrons que f^{-1} est dérivable sur $]0;2[$ et $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

f est dérivable sur I et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) \neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right) =]0;2[$.

$$\forall x \in]0,2[,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\pi\cos(\pi y)}$$

comme $y = f^{-1}(x)$, alors $x = f(y)$, c'est-à-dire $x = 1+\sin(\pi y)$

et donc $\sin(\pi y) = x-1$

Par ailleurs, $\cos^2(\pi y)+\sin^2(\pi y)=1$, donc $\cos^2(\pi y) = 1-(x-1)^2 = 2x-x^2$

Par suite $\cos(\pi y) = \sqrt{2x-x^2}$ car $2x-x^2>0$ d'où :

$$\forall x \in]0,2[,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}.$$ **1pt**

B) Soit $ABCD$ un parallélogramme de l'espace $\mathscr{E}$.

1. Déterminons les réels α, β, δ pour que l'on ait : $D = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$.

$ABCD$ étant un parallélogramme de l'espace, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$, par suite : $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

ceci étant : $D = bar\{(A,1);(B-1);(C,1)\}$. **0,5pt**

2. Déterminer l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = -MC^2\right\}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = -MC^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\left(3\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = 0.\end{aligned}$$

Γ est la sphère de diamètre $[CD]$. **1pt**

EXERCICE 6 : 3 points

1. f est la fonction numérique définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3-3x^2-1$.

(a) Etudier les variations de f.

$D_f =]-\infty,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 6x$; donc f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$; f est décroissante sur $]0,1[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

0,5pt

(b) Prouvons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α avec $1,6 < \alpha < 1,7$.

L'étude des variations ci-dessus montre que f est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$, donc f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]-2;+\infty[$.

De plus, $0 \in]-2;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α.

Par ailleurs, $f(1,6) \approx -0,488$; $f(1,7) \approx 0,156$. Puisque $f(1,6) \times f(1,7) < 0$ alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in]1,6;1,7[$.

- Pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $f(x) < 0$
- Pour $x = \alpha$, $f(x) = 0$; Pour $x \in]\alpha, +\infty[$, $f(x) > 0$. **1pt**

2. (a) Etudier les variations de g sur $]-1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

g est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme fonction rationnelle et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{f(x)}{(1+x^3)^2}.$$

Comme pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$ alors $g'(x)$ a le signe de $f(x)$,

Ainsi g est décroissante sur $]-1, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$ **1pt**

Tableau de variation

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	0

(b) Construisons la courbe C_g de g.

Voir figure ci-contre **0,5pt**