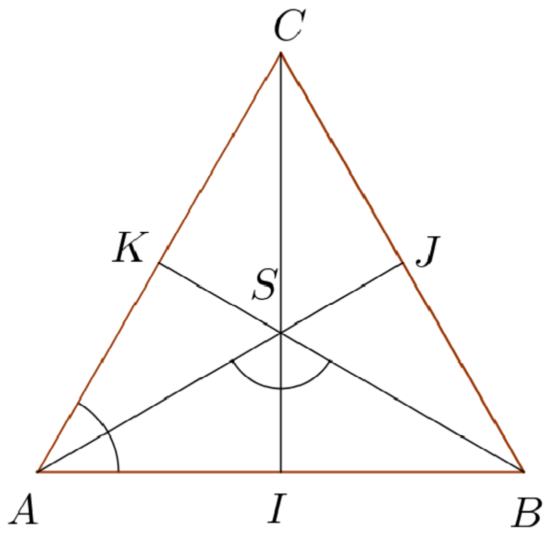
EVALUATION COMPTANT POUR LA TROISIEME SEQUENCE/PREMIERE D/CORRECTION

EXERCICE 1



$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{JS}, \overrightarrow{JC}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(-\overrightarrow{AS}, -\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(-\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}\right) + \pi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Exercice 2 3,5 points

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, tels que mes$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \alpha$ **0,5pt x 4**

   Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

   $(\vec{u}, 2\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$;

   $(-\vec{u}, 3\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = \alpha + \pi$;

   $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = \alpha + \pi$;

   $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = \alpha + \pi$;

   $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$

2. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan tels que **0,5pt x 3**

   $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$

   Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

   Déterminons $(\vec{v}, \vec{w})$;

   D'après la propriété de Chasles, on a $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$

   Donc $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) - (\vec{u}, \vec{v})$

   $$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Déterminons $(-\vec{u},\vec{w})$;

$$(-\vec{u},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})+\pi=\frac{5\pi}{6}+\pi=\frac{11\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

Déterminons $(\vec{v},-\vec{u})$

$$(\vec{v},-\vec{u})=-(-\vec{u},\vec{v})=-((\vec{u},\vec{v})+\pi)=-\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)=\frac{2\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{3}$$

$(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=-\frac{\pi}{2}$	$(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})=-\frac{\pi}{6}$	$(\overrightarrow{v},-\overrightarrow{u})=-\frac{\pi}{3}$

Exercice 3 5 points : 0,5 pt x 10

1. Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$A=2\sin(4\pi-x)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$A=-2\sin x+\sin x-\cos x+\sin x=-\cos x$$

2. Exprimer $\sin\frac{11\pi}{6}$ en fonction de $\sin\frac{\pi}{6}$

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$$

3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$, puis $\sin\frac{7\pi}{8}$ et $\cos\frac{7\pi}{8}$

- $\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}=\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

  $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

4. Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=4\cos 2x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2\sin 4x}{\sin 2x}=\frac{4\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x}=4\cos 2x$$

5. Calculer $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\pi=-1$$

6. Montrer que pour tout réel x, $\cos^4 x+\sin^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2+\left(\sin^2 x\right)^2=+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\left(\sin x\cos x\right)^2=1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=1-2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=1-\frac{1}{4}+\frac{\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}$$

7. Montrer que pour tout réel x, $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

$$\cos 3a=\cos(2a+a)=\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a=\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)\cos a-2\sin a\cos a\sin a$$

$$\cos 3a=\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)\cos a-2\sin a\cos a\sin a=\cos^3 a-\sin^2 a\cos a-2\sin^2 a\cos a$$

$$\cos 3a=\cos^3 a-\sin^2 a\cos a-2\sin^2 a\cos a=\cos^3 a-(1-\cos^2 a)\cos a-2(1-\cos^2 a)\cos a$$

$$\cos 3a=\cos^3 a-(1-\cos^2 a)\cos a-2(1-\cos^2 a)\cos a=\cos^3 a-\cos a+\cos^3 a-2\cos a+2\cos^3 a$$

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$$

8. Montrer que pour tout réel a, $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=\cos^2 a-1+\cos^2 a=2\cos^2 a-1$$

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1\Rightarrow 1+\cos 2a=2\cos^2 a\Rightarrow \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

9. Montrer que pour tout réel a, $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=1-\sin^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a$$

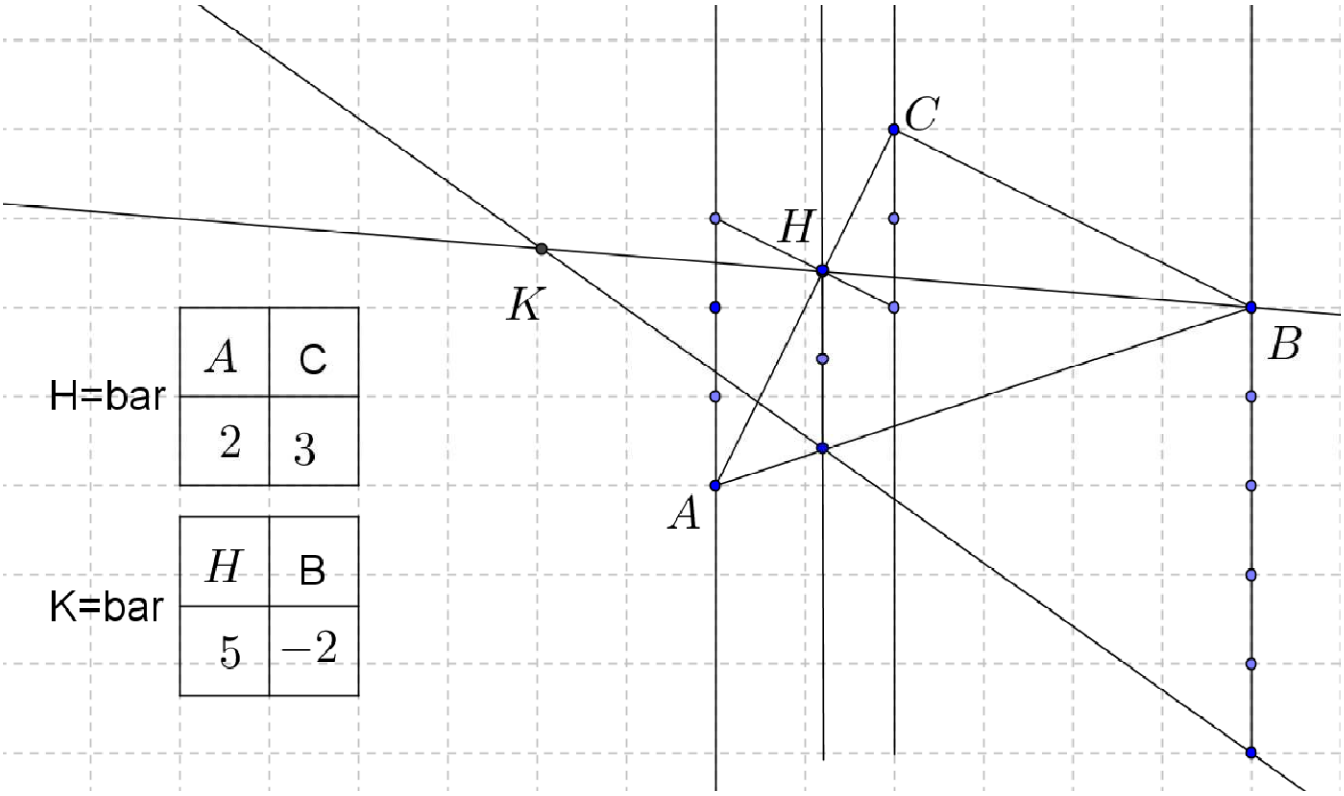
$$\cos 2a=1-2\sin^2 a\Rightarrow 1-\cos 2a=\sin^2 a\Rightarrow \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+k.2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k.2\pi \end{cases}$
- $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin x=\cos\dfrac{5\pi}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{4}+k.2\pi \\ x=\pi-\dfrac{5\pi}{4}+k.2\pi \end{cases}$

Exercice 4 2,5 points

1. ABC est un triangle. Construire le barycentre K des points pondérés (A ;2), (B ;-2) ; (C ;3)



2. Démontrer que les droites (CK) et (AB) sont parallèles.

$2\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{O} \Rightarrow 2\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{O} \Rightarrow -2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{O}$

On obtient donc $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{KC}$

Soit $\overrightarrow{KC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

D'où on conclu que les droites (CK) et (AB) sont parallèles.

Exercice 5 3,5 points

Soit ABCD un carré de coté de longueur a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=a$

a) Prouver que les point A et C sont des points de Γ
   - $\left\|\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=a$ on a remplacé M par A
   - $\left\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=a$ on a remplacé M par C

   Dans chacun des deux cas, la condition est vérifié. Donc A et C sont des points de Γ

b) Prouver que les point B et D ne sont pas des points de Γ
   - $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|+a\sqrt{2}$
   - $\left\|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right\|=\left\|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\right\|=\left\|\overrightarrow{O}\right\|=0$

c) Identifier le barycentre de $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

   On a $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{O}$

   le barycentre de $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ est le point D.

d) Démontrer qu'un point M appartient à l'ensemble Γ si et seulement si $DM = a$

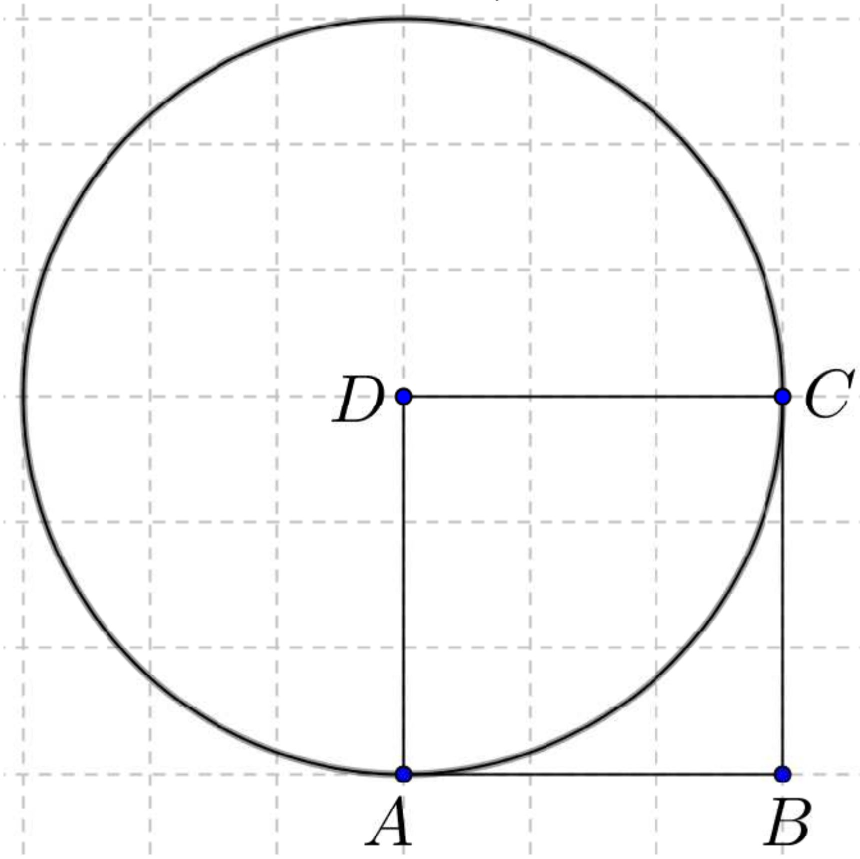
Soit M un point de Γ

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = DM$$

e) En déduire la nature de l'ensemble Γ. Tracer Γ.

Γ est le lieu des points M tels que $DM = a$

Γ est le cercle de centre D et de rayon a.



Exercice 6 3points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} \sqrt{x-3}+y\sqrt{5}=1 \\ 4\sqrt{x-3}+y\sqrt{45}=2 \end{cases}$

Posons $X = \sqrt{x-3}$ et $Y = y$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} X+Y\sqrt{5}=1 \\ 4X+Y\sqrt{45}=2 \end{cases}$

$$Det(S) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ 4 & \sqrt{45} \end{vmatrix} = \sqrt{45}-4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}-4\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

$$Det(X) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{45} \end{vmatrix} = \sqrt{45}-2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}-2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$Det(Y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2$$

$$X = \frac{Det(X)}{Det(S)} = \frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -1 \text{ et } Y = \frac{Det(Y)}{Det(S)} = \frac{-2}{-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

D'où $\sqrt{x-3}=-1$ et $y=1$

Ce système n'a pas de solutions car l'équation $\sqrt{x-3}=-1$ n'admet pas de solution.

2. a) Déterminer le triplet $(x\,;y\,;z)$ vérifiant : $\begin{cases} 2x+3y+z=4300 \\ 5x+5y-z=0 \\ 3x+5y+z=5000 \end{cases}$

 (Utiliser la méthode du pivot de GAUSS)

 la solution du système est (500,100,3000)

 b) Dans une boutique, on trouve quatre cahiers, six bics et deux livres qui coûtent 8600 francs ; le prix d'un livre est cinq fois le prix du bic et du cahier réunis. Sachant que 2 livres, 10bics et 6 cahiers coutent 10000 francs. Quelle est le prix de chaque article ?