MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
03.10.2017	EXAMEN	SEQUENCE N° 1	Durée : 3h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 3,5 points

1. **(a)** Démontrer que , $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{4n} \equiv 1[5]$. **0,5pt**

   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2018^{2017} par 5. **0,5pt**
2. Montrer par congruence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. **0,75pt**
3. Dans le système décimal, un nombre entier naturel s'écrit : $N = \overline{x00y}$.

   (a) Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$. **0,25pt**

   (b) Déterminer tous les nombres entiers N qui sont divisibles par 7. **1,5pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

Soit n un entier naturel. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3. **0,5pt**
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \left(F_n - 1\right)^2 + 1$. **0,5pt**
3. Montrer que pour tout $n > 1$, l'écriture décimale de F_n se termine par 7. **0,75pt**
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. **1pt**
5. Pour $k \geq 1$, on pose $F_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + 1$ et $a = 2^{2^n}$.

   (a) Montrer que $\dfrac{F_{n+k} - 2}{F_n} = \dfrac{a^{2^k} - 1}{a+1}$. **0,5pt**

   (b) En déduire que F_n divise $F_{n+k} - 2$. **0,5pt**

   (c) Montrer que si d divise F_n et F_{n+k}, alors d divise 2. **0,5pt**

   (d) Montrer que $d = 1$. **0,25pt**

EXERCICE 3 : 4 points

1. Dans $\mathbb{N}$, on définit la loi de composition interne notée $*$ par :

   $$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a * b = a + b + ab.$$

   On définit également $a^{(n)}$ par $a^{(1)} = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ a^{(n)} = a^{(n-1)} * a$.

   (a) Exprimer $a^{(2)}, a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de a. **0,75pt**

   (b) Faire une conjecture sur l'expression de $a^{(n)}$. **0,5pt**

   (c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer la conjecture de (b). **0,75pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 2[15] \\ x \equiv 8[28] \end{cases}$. **1pt**
3. Un phare d'un camion émet un signal jaune toutes les 15 secondes et un signal rouge toutes les 28 secondes. On aperçoit le signal jaune 2 secondes après minuit et le signal rouge 8 secondes après.

   A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ? **1pt**

EXERCICE 4 : 4 points

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A et B sont des points d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = i$. f est l'application de $\mathscr{P}-\{B\}$ vers $\mathscr{P}$ qui, à tout point $M\left(z\right)$ associe $M'\left(z'\right)$ tel que $z' = i\dfrac{z-2i}{z-i}$. Pour tout entier naturel n, on désigne par M_n le point d'affixe $z_n = \left(\sqrt{3}-i\right)^n$. On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right): z^2\cos^2\theta - z\sin 2\theta + 1 = 0$ où $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Pour quelles valeurs de n les points M_n appartiennent-ils à l'axe réel ? **0,5pt**
2. Déterminer n pour que les points M_n appartiennent à la première bissectrice. **0,5pt**
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5pt**
4. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'. **0,5pt**
5. Déterminer et construire dans le même repère :
   (a) L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z'| = 1$. **0,5pt**
   (b) L'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réelle. **0,5pt**
6. Résoudre l'équation $\left(E\right)$ dans $\mathbb{C}$. **1pt**

EXERCICE 5 : 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. Soit M un point du plan d'affixe z. On considère les points P, Q et R du plan d'affixes respectives z^4, z^2 et 1.
On pose $G = bar\left\{\left(P,4\right),\left(Q,3\right),\left(R,1\right)\right\}$.

1. Montrer que si les points G et O sont confondus, alors, il existe quatre positions du point M que l'on déterminera. **2pts**
2. Ecrire le polynôme $P\left(z\right) = 4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme de deux trinômes de second degré à coefficients réels. **0,5pt**
3. **(a)** En déduire que dans tout système de numération de base $b \geq 5$, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$. **0,5pt**
   (b) On suppose que $b = 9$. Ecrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$. **0,5pt**
4. Déterminer la forme algébrique de $z_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2013}$. **0,5pt**

Bon travail et bonne chance