MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
08.10.2016	EXAMEN :	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	Durée : 3h	Classe : T[le] C
COEFF. 5	EPREUVE :	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

L'épreuve comporte quatre exercices et un problème, tous obligatoires, sur deux pages numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 : 2,5 points

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{3^{k+1}} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. **1pt**
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = u_n - an - b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer a et b pour que la suite (v_n) soit géométrique. **1pt**
   (b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 2,5 points

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $A_n = 3^{2n} - 2^n$.
   Démontrer par récurrence que : A_n est multiple de 7. **1pt**
2. **(a)** Démontrer par récurrence que :
   $\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$. **1pt**
   (b) Démontrer que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 3 points

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose : $B_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geq 1$, on a : $\dfrac{B_n}{B_{n+1}} \geq 2$. **0,75pt**
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $B_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. **0,5pt**
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$. **0,25pt**
2. **(a)** Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. **1pt**
   (b) En déduire la somme $S = 11\times 2^{11} + 12\times 2^{12} + 13\times 2^{13} + \ldots + 21\times 2^{21}$. **0,5pt**

EXERCICE 4 : 2 points

1. Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 4)$ et $b \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$.
   Déterminer le reste modulo 4 de $3a^2 + ab - 9$. **0,5pt**
2. Déterminer le chiffre des unités de 9^{2016}. **0,5pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ l'équation $(E) : xy = 3x + 2y + 54$. **1pt**

PROBLEME : 10 points

Ce problème comporte deux parties liées A et B.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note C_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. *unité graphique : 2cm*

PARTIE A : 5,5 points

1. Montrer que C_f admet deux asymptotes horizontales. **0,5pt**
2. Etudier les variations de f. **1,5pt**
3. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [-1;0]$. **1pt**
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left| f(x) + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|$. **0,5pt**
6. Tracer la courbe C_f de f et la courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans le même repère. **1,5pt**

PARTIE B : 4,5 points

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et $I = [-1;0]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$. **0,75pt**
2. **(a)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante. **0,75pt**

   (b) En déduire que (u_n) est convergente. **0,5pt**
3. **(a)** Montrer que pour tout $x \in I, \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**

   (b) En déduire que :

   $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **1,5pt**

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. **0,5pt**