MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
21.11.2016	EXAMEN	SEQUENCE N° 2	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : **2,5 points**

1. Montrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55. **0,75pt**
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{N}^*, (x+1)^n - nx - 1$ est divisible par x^2. **1pt**
3. Déterminer les nombres premiers p tels que p divise $8^p + 20$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : **3,75 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit les points $A(-1;1)$ et $B(3;2)$. On considère l'application g du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Donner l'écriture complexe de g. **0,5pt**
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = 2 - 4i$. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'_0}$ **0,5pt**
3. On considère un point M dont les coordonnées x et y sont des entiers.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow 5x + 3y = -2$. **0,5pt**
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x + 3y = -2$. **1pt**
   (c) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers de l'intervalle $[-6; 6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux. **0,5pt**
4. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M d'affixes z tels que :
   $\arg\left((z+1-i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : **3,25 points**

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,1); B(1,0,0); C(-1,0,1)$ et $D(1,-1,0)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan (P). **0,5pt**
2. Ecrire une équation cartésienne du plan (P). **0,5pt**
3. Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre, puis calculer son volume. **0,5pt**
4. Soit $(S) = \left\{M(x, y, z) \in \mathscr{E} / x^2 + y^2 + z^2 + y - z - 1 = 0\right\}$.
   (a) Montrer que (S) est une sphère. Préciser son centre I et son rayon r. **0,5pt**
   (b) Vérifier que la sphère (S) est circonscrite au tétraèdre $ABCD$. **0,5pt**
   (c) Ecrire une équation cartésienne du plan (Q) tangent à (S) au point D. **0,75pt**

EXERCICE 4 : 4 points www.doualamaths.net

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout point M d'affixe z, on associe le point M_1, symétrique de M par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$, puis le point M_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis le point M', image de M_2 par la translation de vecteur $\vec{u}-\vec{v}$. On note I le milieu du segment $[MM']$.

1. Déterminer en fonction de z les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2. **0,5pt**
2. Montrer que l'affixe z' de M' vérifie : $z' = i\bar{z}+1-i$. **0,5pt**
3. Montrer que $Z = \frac{z'-z}{1+i}$ est imaginaire pur ou nul. **0,75pt**
4. Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M'.
   (a) Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par φ. **0,5pt**
   (b) En déduire que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à Δ. **0,5pt**
   (c) Exprimer en fonction de z, l'affixe du point I et vérifier que $I \in \Delta$. **0,75pt**
   (d) Caractériser alors l'application φ. **0,5pt**

EXERCICE 5 : 3,5 points

A) Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1+\sin(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **0,75pt**
2. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   (a) Déterminer $f^{-1}(1)$. **0,25pt**
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;2[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$. **1pt**

B) Soit $ABCD$ un parallélogramme de l'espace $\mathscr{E}$.

1. Déterminer les réels α,β,δ pour que l'on ait : $D = bar\left\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\right\}$. **0,5pt**
2. Déterminer l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = -MC^2\right\}$. **1pt**

EXERCICE 6 : 3 points

1. f est la fonction numérique définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3-3x^2-1$.
   (a) Etudier les variations de f. **0,5pt**
   (b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, avec $1,6 < \alpha < 1,7$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. **1pt**
2. On définit la fonction g sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
   (a) Etudier les variations de g. *on pourra exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.* **1pt**
   (b) Construire la courbe C_g de g dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. **0,5pt**
   On prendra : $\alpha \approx 1,65$; $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 5cm$. www.doualamaths.net