MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
29.12.2016	EXAMEN	MINI SESSION 2	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 4 points

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(2,-3,-1);B(1,0,2)$ et $C(0,1,3)$.

1. **(a)** Montrer que les points A,B et C ne sont pas alignés. **0,5pt**

   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}=(ABC)$. **0,5pt**

2. On considère l'ensemble S_θ des points $M(x,y,z)$ vérifiant :

   $x^2+y^2+z^2-2\theta x-2y\sin\theta+\theta^2-1+\sin^2\theta=0$ où $\theta\in[-\pi,\pi[$.

   (a) Montrer que S_θ est une sphère dont on précisera, en fonction de θ son centre I_θ et son rayon r_θ. **0,75pt**

   (b) Déterminer l'ensemble des points I_θ lorsque $\theta\in[-\pi,\pi[$. **0,75pt**

   (c) Etudier suivant les valeurs de θ l'intersection de la sphère S_θ avec le plan $\mathscr{P}$. **1,5pt**

EXERCICE 2 : 6 points

A) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525m$ et $285m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle.

1. Calculer la distance comprise entre deux arbres. **0,75pt**
2. Calculer le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ. **0,5pt**

B) 1. Montrer que pour tout réel $x>0$, on a : $\dfrac{1}{1+x}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\dfrac{1}{x}$. **0,75pt**

2. Soit la suite (U_n) définie pour tout $n\geq1$ par : $U_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)\leq U_n\leq\ln 2$. **0,75pt**

   (b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite. **0,75pt**

C) 1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a : $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$. **0,75pt**

2. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **1pt**

3. On pose $P_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\times\cdots\cdots\times\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_n$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : 4 points

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. **(a)** Montrer que f est continue à droite en 0. **0,5pt**

   (b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter le résultat. **0,75pt**

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}$. **1pt**

3. **(a)** Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -4x\ln x$. **0,5pt**

   (b) Dresser le tableau de variation de f.

4. Préciser les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(O,\vec{i})$. **0,5pt**

5. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. **0,75pt**

EXERCICE 4 : 6 points

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct et tel que : $AC = 2AB$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

1. Faire une figure. **0,5pt**

2. **(a)** Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = I$ et $f(B) = C$. **0,5pt**

   (b) Montrer que f est une rotation. Préciser son angle et placer son centre Ω. **1pt**

3. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, on pose $h = f \circ r^{-1}$.

   (a) Déterminer la nature de l'application h. **0,5pt**

   (b) Déterminer $h(A)$ et en déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ r$. **1pt**

4. On pose $E = r(I)$ et on désigne par F le point tel que $AEFI$ soit un carré.

   (a) Déterminer $f \circ f(A)$. **0,5pt**

   (b) En déduire que Ω est le milieu de $[AF]$. **0,5pt**

5. **(a)** Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie I sur A et A sur B. **0,5pt**

   (b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur. **1pt**