MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
31.12.2016	EXAMEN	MINI-SESSION 3	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 5 points

$ABCD$ est un carré de sens direct. Soit E le milieu de $[CD]$. On désigne par F et G des points du plan tels que $DEFG$ soit aussi un carré direct.

1. Faire une figure. **0,5pt**
2. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   - **(a)** Déterminer le rapport k et l'angle θ de S. **1pt**
   - **(b)** Déterminer $S(E)$. **0,5pt**
3. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à $ABCD$ et Ω le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
   - **(a)** Calculer $mes\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{FB}\right)$. En déduire que $\Omega\in\mathscr{C}$. **0,75pt**
   - **(b)** Montrer que les droites (ΩB) et $(D\Omega)$ sont orthogonales. **0,5pt**
4. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\vec{j}=\dfrac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ et $AB=3$. Soit $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$.
   - **(a)** Donner l'écriture complexe de S dans le repère $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$. **0,75pt**
   - **(b)** Montrer que $\mathscr{B}=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est une base et donner la matrice de l'application linéaire associée φ à S dans cette base. **1,5pt**

EXERCICE 2 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)z+i=0$. **1pt**
2. Soit θ un réel tel que : $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.
   On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta): z^2-2e^{i\theta}z\cos\theta+e^{i2\theta}=0$.
   - **(a)** Vérifier que 1 est une solution de (E_θ). **0,5pt**
   - **(b)** En déduire l'autre solution de (E_θ). **0,75pt**
3. On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{i2\theta}$.
   - **(a)** Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. **0,5pt**
   - **(b)** Trouver l'affixe du point C pour que le quadrilatère $OACB$ soit un losange. **0,5pt**
   - **(c)** Déterminer le(s) réel(s) θ pour que l'aire $\mathscr{A}$ de $OACB$ soit égale à $\dfrac{1}{2}$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : **5 points**

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=\frac{1}{2}x$, la symétrie φ d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction celle de l'axe $\left(O,\vec{j}\right)$. Soit g l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+1 \\ y'=-\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que g est bijective et vérifier que $g\circ\varphi=\varphi\circ g$. **1,5pt**
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ invariants par g. **0,5pt**
3. Montrer que si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera. **1pt**
4. Calculer les coordonnées du point H intersection de (MM') et (Δ). **1pt**
5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques. **1pt**

EXERCICE 4 : **6 points**

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. **(a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. **0,5pt**

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. **0,75pt**

   (c) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ g'(x)=\frac{1+x}{x^2}$. **0,5pt**

   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction g. **0,5pt**

2. **(a)** Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. **0,5pt**

   (b) Tracer (T) et $\mathscr{C}$. **1pt**

3. On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-1+(x-1)\ln x$.

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>f</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>-1</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

   (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$ exactement 2 solutions notées α et β. *(on prendra $\alpha<\beta$).* **1pt**

   (b) Justifier que $0,2<\alpha<0,3$ et que $2,2<\beta<2,3$. **0,5pt**

   (c) Prouver que f est une primitive de g sur $]0,+\infty[$. **0,75pt**