MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
02.01.2017	EXAMEN	MINI-SESSION 4	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 5 points

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit f l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point $E' = f\left(E\right)$. **0,5pt**
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$. **0,75pt**
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.
   (a) Montrer que $\forall z \neq 0, z \neq -1, z \neq 1,$ on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. **0,5pt**
   (b) En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$, puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$. **1pt**
4. Soit Δ la médiatrice du segment $\left[AB\right]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ. **0,5pt**
5. Soit Γ le cercle de diamètre $\left[AB\right]$.
   (a) Montrer que si $M \in \Gamma$, alors $M' \in \left(AB\right)$. **1pt**
   (b) Tout point de la droite $\left(AB\right)$ a-t-il un antécédent par f ? **0,75pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $\left(E\right): 2x-3y=1$.
   (a) Justifier que si $\left(x, y\right)$ est une solution de $\left(E\right)$ alors x et y sont premiers entre eux. **0,5pt**
   (b) Vérifier que $\left(-1,-1\right)$ est une solution de $\left(E\right)$ et achever sa résolution. **1pt**
2. Pour tous entiers m et n, on définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & n-1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2011\times13^{2013} & 2015\times11^{2012} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer tous les couples $\left(m,n\right)$ pour lesquels A n'est pas inversible. **1pt**
   (b) Vérifier que $2011\times13^{2013} \equiv 1\left[3\right]$ et $2015\times11^{2012} \equiv 2\left[3\right]$. **1pt**
   (c) Montrer que la matrice B est inversible. **1pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte deux parties A et B.

PARTIE A : 3,5 points

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. **0,5pt**
2. Etudier le sens de variation de g. **1pt**
3. **(a)** Dresser le tableau de variation de g. **0,5pt**

   (b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel α positif tel que $g(\alpha)=0$. **0,5pt**

   (c) Vérifier que $0,5<\alpha<0,6$. **0,5pt**
4. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. **0,5pt**

PARTIE B : 7 points

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x>0$ et $f(0)=0$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : *5cm*).

1. **(a)** Montrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=g(x)$. **0,5pt**

   (b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$. **0,5pt**
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **1pt**
3. **(a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. **0,5pt**

   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0. **0,5pt**

   (c) Préciser la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de f en 0. **0,5pt**
4. **(a)** Prouver que, pour tout $x\in[0,5;\alpha]$, on a : $0\le f'(x)\le f'(0,5)$. **0,5pt**

   (b) En déduire que pour tout $x\in[0,5;\alpha]$, on a :

   $0\le f(\alpha)-f(0,5)\le(\alpha-0,5)f'(0,5)$

   puis que $0\le f(\alpha)-f(0,5)\le\frac{1}{10}f'(0,5)$. **1pt**

   (c) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près. **0,5pt**
5. Dresser le tableau de variations de f. **0,5pt**
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f. **1pt**