

12 juillet 2006

**Problème 1.** Soit  $ABC$  un triangle et  $I$  le centre de son cercle inscrit. Un point  $P$  intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que  $AP \geq AI$  et que l'égalité a lieu si et seulement si  $P = I$ .

**Problème 2.** Soit  $P$  un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de  $P$  est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de  $P$  en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de  $P$ . Les côtés de  $P$  sont aussi appelés *bons*.

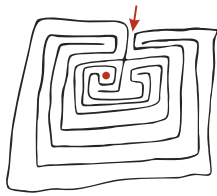
On suppose que  $P$  a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de  $P$ . Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

**Problème 3.** Trouver le plus petit réel  $M$  tel que l'inégalité

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

*Temps accordé: 4 heures et demie  
Chaque problème vaut 7 points*



13 juillet 2006

**Problème 4.** Trouver tous les couples  $(x, y)$  d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problème 5.** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients entiers, de degré  $n > 1$  et  $k$  un entier strictement positif. On considère le polynôme  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , dans lequel  $P$  apparaît  $k$  fois. Montrer qu'il existe au plus  $n$  entiers  $t$  tels que  $Q(t) = t$ .

**Problème 6.** A tout côté  $b$  d'un polygone convexe  $P$  on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans  $P$  et ayant  $b$  comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de  $P$  est au moins le double de l'aire de  $P$ .

*Temps accordé: 4 heures et demie  
Chaque problème vaut 7 points*