12 juillet 2006

**Problème 1.** Soit $ABC$ un triangle et $I$ le centre de son cercle inscrit. Un point $P$ intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

**Problème 2.** Soit $P$ un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de $P$ est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de $P$ en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de $P$. Les côtés de $P$ sont aussi appelés *bons*.

On suppose que $P$ a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de $P$. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

**Problème 3.** Trouver le plus petit réel $M$ tel que l'inégalité

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels $a$, $b$ et $c$.

*Temps accordé: 4 heures et demie*
*Chaque problème vaut 7 points*

13 juillet 2006

**Problème 4.** Trouver tous les couples $(x, y)$ d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problème 5.** Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et $k$ un entier strictement positif. On considère le polynôme $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dans lequel $P$ apparaît $k$ fois. Montrer qu'il existe au plus $n$ entiers $t$ tels que $Q(t) = t$.

**Problème 6.** A tout côté $b$ d'un polygone convexe $P$ on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans $P$ et ayant $b$ comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de $P$ est au moins le double de l'aire de $P$.

*Temps accordé: 4 heures et demie*
*Chaque problème vaut 7 points*