Version: French

Premier jour
Mercredi 25 juillet 2007

Problème 1. Soit n nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$ on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{$*$}$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tels que $(*)$ soit une égalité.

Problème 2. On donne cinq points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit ℓ une droite passant par A. On suppose que ℓ coupe l'intérieur du segment DC en F et coupe la droite BC en G. On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

Problème 3. Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une *clique* si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa *taille*.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Temps accordé : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Version: French

Deuxième jour
Jeudi 26 juillet 2007

Problème 4. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de BC en P et la médiatrice de AC en Q. Le milieu de BC est K et le milieu de AC est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Problème 5. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a=b$.

Problème 6. Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \Big\{(x,y,z) \ : \ x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\Big\},$$

constitué de $(n+1)^3-1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais ne contient pas $(0,0,0)$.

Temps accordé : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points