Nouvelle–Calédonie

1. Exercice 1

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ et : $z_D = -2\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.

c. Montrer que $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points :

$$A(4\,;0\,;0),\ B(0\,;2\,;0),\ C(0\,;0\,;3) \text{ et } E\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{9}\right).$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (P) est égale à

$$\frac{\left|ax_M+by_M+cz_M+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;6\,;4)$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. a. Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

3. Exercice 3

5 points

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité q

suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$.

4. Exercice 4

6 points

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Nouvelle Calédonie, Bac Mars 2009 – Corrigé *(ou éléments seulement…)*

Exercice 1.

1a. La rotation de centre A(1) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ a pour écriture complexe $z'-1=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-1)$.

Or $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc l'image de B(3+4i) a pour affixe

$z_{B'}=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3+4i-1)=...=-2\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ donc D est bien l'image de B.

1b. Une rotation est une isométrie, cad que c'est une transformation qui conserve les longueurs : considérons le cercle de centre A et de rayon AB. Comme r est une isométrie et qu'elle envoie A sur A et B sur D on a AB=AD.
Ainsi, B et D sont sur ce cercle.

2a. L'homothétie de centre B(3+4i) et de rapport $\frac{3}{2}$ a pour écriture complexe $z'-(3+4i)=\frac{3}{2}\left(z-(3+4i)\right)$.

L'image F du point A(1) a donc pour affixe $z_F=(3+4i)+\frac{3}{2}\left(1-(3+4i)\right)=..=-2i$.

2b. Le milieu de [CD] a pour affixe $\frac{z_C+z_D}{2}=...=-2i$.

2c. On a $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\frac{2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)-(-2i)}{1-(-2i)}=\sqrt{3}\frac{2-i}{1+2i}=\sqrt{3}\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=...=-i\sqrt{3}$. On a donc $-i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

- Passons à l'argument l'égalité démontrée ci-dessus, il vient : $\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}\right)=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc (AF) est perpendiculaire à (CD).
- Reste à vérifier que (AF) passe par le milieu de [CD] : comme c'est F, c'est évident !

3. Donnons-nous donc les points A, B et F.
> Pour construire D, rien de plus simple : d'après la question 1a, on trace le cercle de centre A et de rayon AB.

Notons B' le symétrique de B par rapport à A. Comme D est l'image de B par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre A, on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

Pour tracer cet angle, on peut placer le milieu J de [AB'], sa perpendiculaire passant par J et on obtient deux points d'intersection avec le cercle.

D est le point tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$, l'autre étant le point M tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

> F étant le milieu de [CD], on place ensuite le symétrique de D par rapport à F pour obtenir C.

Exercice 2.

1a. Ces points déterminent un unique plan ssi ils sont non alignés. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc les points ne sont pas alignés.

1b. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$: ce vecteur est normal au plan ssi il est orthogonal à deux sécantes. Les droites (AB) et (AB) n'étant pas parallèles, elle sont sécantes donc il suffit de vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$.

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}=-12+12+0=0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}=-12+0+12=0$ d'où le résultat cherché.

1c. Les points A, B et C définissant un unique plan, il suffit de vérifier que chacun de ces points vérifie l'équation $3x+6y+4z-12=0$ (je vous laisse le faire).

<u>Remarque</u> : en fait, le plan ci-dessus admet $\vec{n}$ pour vecteur normal donc il suffit de vérifier qu'un seul de ces points est dans ce plan car il existe un unique plan de vecteur normal donné passant par un point A.

1d. A l'aide la formule rappelée dans l'énoncé, on a $\delta_E=\dfrac{|3\frac{2}{3}+6\frac{-2}{3}+4\frac{1}{9}-12|}{\sqrt{3^2+6^2+4^2}}=\dfrac{122/9}{\sqrt{61}}=\dfrac{122}{9\sqrt{61}}$

2a. Soit $D:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=\frac{5}{9}+\frac{4}{3}t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

- D admet le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, donc aussi le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$ (on a multiplié les coordonnées par 3) : D est donc orthogonale au plan (ABC).
- Prenons $t=-\frac{1}{3}$: on obtient comme point de $D:\begin{cases}x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\y=\frac{4}{3}\\z=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}\end{cases},t\in\mathbb{R}$ cad E ! Donc E est un point de D.

2b. Par définition, G est le point d'intersection de la perpendiculaire à (ABC) qui passe par E, cad de D et (ABC).

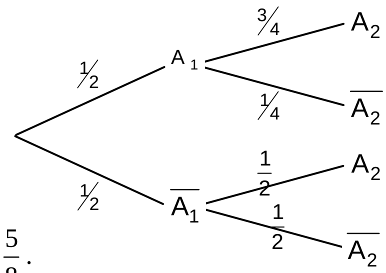
Résolvons le système $D:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=\frac{5}{9}+\frac{4}{3}t\\3x+6y+4z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=\frac{5}{9}+\frac{4}{3}t\\3(1+t)+6\times2t+4\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}t\right)-12=0\end{cases}\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=\frac{5}{9}+\frac{4}{3}t\\t=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=1\end{cases}$ donc $G\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\1\end{pmatrix}$.

2c. La distance entre E et la plan est (justement ou donc) la longueur $EG=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})\right)^2+\left(1-\frac{1}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{244}{81}}=\frac{2\sqrt{61}}{9}$ avec $\frac{2\sqrt{61}}{9}=\frac{2\times61}{9\sqrt{61}}=\frac{122}{9\sqrt{61}}$ comme en 1d !

Exercice 3.

1a. D'après l'énoncé, $a_1 = \frac{1}{2}$ donc $b_1 = \frac{1}{2}$.

Dressons un arbre pondéré :

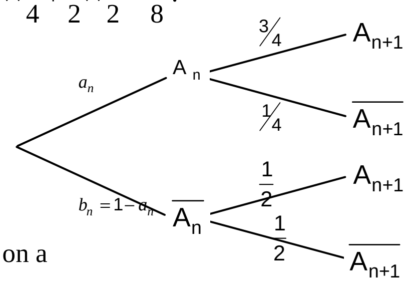


D'après la formule des probabilités totales, on a

$$a_2 = p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Par conséquent $b_2 = 1 - p(A_2) = \frac{3}{8}$.

2. Dressons encore un arbre :



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times \frac{1}{2} = a_n \times \frac{3}{4} + (1 - a_n)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a_n.$$

3a. Soit $U_n = a_n - \frac{2}{3}$: $U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{6} + a_n\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3} + a_n\right) = \frac{1}{4}U_n$.

Elle est donc géométrique de raison ¼, et de premier terme $U_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

3b. Par conséquent, $U_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et comme $a_n = U_n + \frac{2}{3}$ on a $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

3c. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

3d. On cherche n tel que $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} > 0.6665 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \underbrace{\frac{2}{3} - 0.6665}_{c} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 6c \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} (n-1)\ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(6c)$ et

comme ln(0.25)<0, on obtient $n > \dfrac{\ln(6c)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} + 1 \approx 5.98$ donc dès n = 6.

Exercice 4.

Posons $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

1a. Une exponentielle est toujours positive donc f(x) est du signe de 1+x cad f(x) > 0 ssi x > -1 (donc négative sinon).

1b.

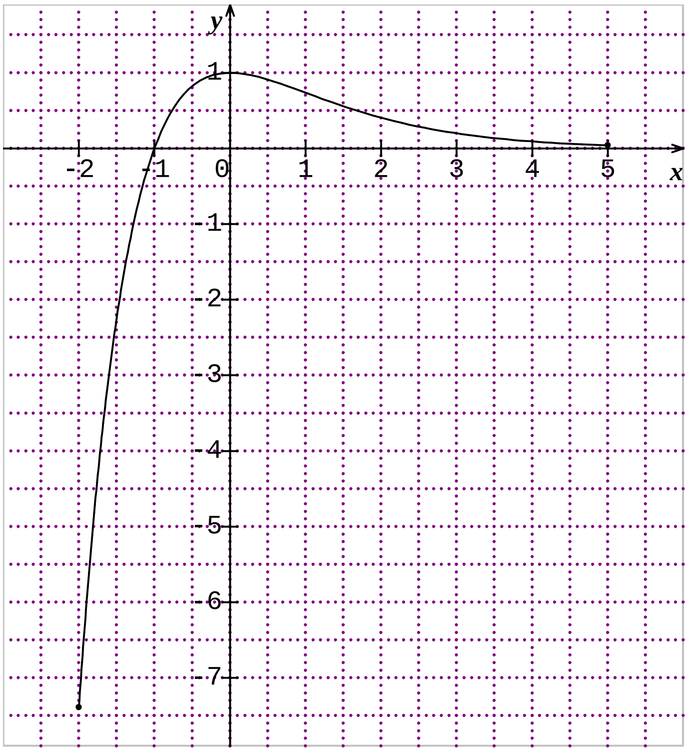
> On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

> On a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (croissance comparée), on obtient somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + xe^{-x}\right) = 0$.

1c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et on a $f'(x) = 1e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = e^{-x}(1-1-x) = -xe^{-x}$.

f' est donc du signe de -x et on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f (x)	$-\infty$	↗	1	↘	0



2. Posons $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)dx$.

2a. La courbe suggère que f(x) > pour tout x > -1.
Vérifions cela : on a f(-1) = 0.
> pour $x \in]-1;0[$, f croit et comme f s'annule en -1, f est strictement positive sur et intervalle.
> pour $x \in [0;n]$, $n \in \mathbb{N}$ f décroit, tend vers 0 donc elle est aussi minorée par 0 (strictement).
> ainsi, pour tout $x \in]-1;n[$, f(x) > 0 donc par intégration sur cet intervalle $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)dx > 0$.

<u>Remarque</u> : on peut aussi parler d'aire géométrique d'un domaine, donc l'intégrale est positive.

2b. On a

$$I_{n+1} = \int_{-1}^{n+1} f(x)dx \overset{\text{Chasles}}{=} \int_{-1}^{n} f(x)dx + \int_{n}^{n+1} f(x)dx = I_n + \int_{n}^{n+1} f(x)dx$$

Par les mêmes arguments, $\int_{n}^{n+1} f(x)dx > 0$ donc $I_{n+1} > I_n$.

3a. Posons $\begin{cases} u = 1+x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ (fonctions dérivables de dérivées continues).

Par intégration par parties, on trouve : $\int_a^b f(x)dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_a^b - \int_a^b -e^{-x}dx = (1+a)e^{-a} - (1+b)e^{-b} + \left[-e^{-x}\right]_a^b$
$= (1+a)e^{-a} - (1+b)e^{-b} + e^{-a} - e^{-b} = e^{-a}(2+a) - e^{-b}(2+b)$.

3b. Pour a = -1 et b = n, on obtient $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)dx = e^1 - e^{-n}(2+n)$.

3c. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e$.

3d. La fonction f étant continue et positive sur [-1 ;n] pour tout entier naturel n, In correspond à l'aire géométrique du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses pour x dans [-1 ;n].
Ainsi, quand n tend vers +infini, ce domaine devient « infini » (cad non borné) mais il admet pourtant une aire finie, e (u.a) !

4. Résolvons l'équation $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = e \Leftrightarrow e^1 - e^{-\alpha}(2+\alpha) = e \Leftrightarrow e^{-\alpha}(2+\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Ceci dit, ce calcul intégral correspond au calcul de l'aire (géométrique) du domaine ci-dessous.