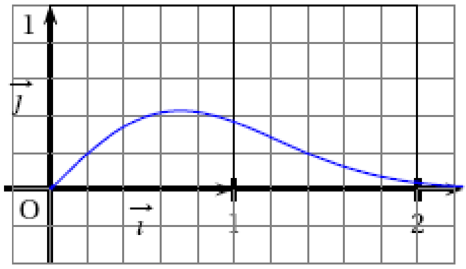
Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

   b. En déduire une expression de n en fonction de m.

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \frac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{\mathrm{i}\theta}$.

   b. Calculer $|q - 2 - \mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}$ et $z_B = 1 + 2\mathrm{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(O) = A \text{ et } S(A) = B.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
   On considère la suite de points (A_n) telle que :
   - A_0 est l'origine du repère et,
   - pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

   On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \mathrm{i})^n$.

   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées $(0, -2, 5)$ et D de coordonnées $(1, -5, 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X = 2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

   (On pourra construire un arbre de probabilité).
   b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.
   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

1. Exercice 1

A1a. On a $f(x)=xe^{-x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et d'après les résultats de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$. Ainsi, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$.

De plus, comme la fonction inverse tend vers 0 en l'infinie, on a par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

A1b. Dressons le tableau de variations de la fonction dérivable f (produit de fonctions dérivables) sur son domaine $[0;+\infty[$.

On a $f'(x)=1e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=e^{-x^2}\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$.

Comme une exponentielle est toujours positive, f' est du signe du trinôme 1-2x² de racines $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (hors du domaine).

On obtient alors

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f '(x)	0	+	0	-	
f (x)	1	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

f admet bien pour maximum $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A2. Comme la fonction est continue et positive sur [0 ;a], l'aire du domaine cherchée est donnée par $F(a)=\int_0^a f(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^a \underbrace{-2xe^{-x^2}}_{u'e^u}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^a=\frac{1-e^{-a^2}}{2}$ u.a.

Ainsi, $\lim\limits_{a\to+\infty}F(a)=\frac{1}{2}$.

B. Posons $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

B1a. D'après la partie A, f décroit sur $[1;+\infty[\subset[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$ donc par définition $n\le x\le n+1\Rightarrow f(n+1)\le f(x)\le f(n)$.

En passant cet encadrement à l'intégrale, on obtient $\int_n^{n+1}\underbrace{f(n+1)}_{indep.\ de\ x}dx\le u_n\le\int_n^{n+1}\underbrace{f(n)}_{indep.\ de\ x}dx\Leftrightarrow f(n+1)\le u_n\le f(n)$ puisque pour tout réel k indépendant de x, on a : $\int_a^b kdx=k(b-a)$.

B1b. D'après le calcul précédent, $f(n+2)\le u_{n+1}\le f(n+1)$ donc $f(n+2)\le u_{n+1}\le f(n+1)\le u_n\le f(n)$: la suite est donc décroissante.

B1c. Comme u_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $[n;n+1]$, elle est positive (minorée par 0). Comme en plus elle est décroissante, elle converge vers un réel L positif.

On sait que $0\le u_n\le f(n)$: comme $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$, d'après le théorème des gendarmes, la suite tend vers 0.

Attention : l'argument $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n+1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{+\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ est faux (contre exemple avec f(x) = x).

B2a. On a $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + .. + u_n = \int_0^1 f + \int_1^2 f + .. \int_{n-1}^n f \underset{\sqcap}{\overset{chasles}{=}} \int_0^n f$ et on reconnaît bien F(n).

B2b. En A2, on a trouvé que $\lim_{a\to+\infty} F(a) = \frac{1}{2}$: ce tableau le confirme et il semble que F(n) soit proche (attention aux précisions du tableur) de sa limite dès n supérieur à 5.

2. Exercice 2 (non spé)

Soient A(3-i), B(1-3i) et C(-1-i).

1b. On a, avec les notations habituelles : $\frac{c-b}{a-b} = \frac{-2+2i}{2+2i} = \frac{-2+2i}{i(2-2i)} = i$.

Par conséquent $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = \frac{BC}{AB} = |i| = 1$: le triangle ABC est donc rectangle isocèle en B.

1c. On a $OA = |3-i| = \sqrt{10}$ et $OB = |1-3i| = \sqrt{10}$ donc A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

2a. La rotation de centre M(m) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' - m = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-m)$ cad $z' = m + i(z-m)$.

2b. Comme N(n) est l'image de A(a-i), on a $n = m + i(3-i-m) \Leftrightarrow n = 1+3i+m-im$.

3. Soit Q(q) le milieu de [AN] : on a $q = \frac{z_A + z_N}{2} = \frac{1}{2}(3-i+1+3i+m-im) = \frac{(1-i)m}{2} + \frac{4+2i}{2} = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.

4a. Supposons que $M \in \Gamma$ cad que $OM = \sqrt{10}$.
Comme OM est le module de m, par définition de l'écriture exponentielle, en notant θ son argument on obtient $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

4b. On a vu que $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$ donc $q - 2 - i = \frac{(1-i)m}{2} = \frac{(1-i)\sqrt{10}}{2}e^{i\theta}$ et par conséquent on trouve $|q-2-i| = \frac{|1-i|\sqrt{10}}{2}\underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10} = \sqrt{5}$.

Lorsque M décrit Γ, Q décrira le cercle de centre D(2+i) et de rayon $\sqrt{5}$.

3. Exercice 2 (spé)

Dans la semaine... si si !!

4. Exercice 3

Soient A(1 ;1 ;0), B(2 ;0 ;3), C(0 ;-2 ;5) et D(1 ;-5 ;5).
Proposition 1 : FAUX. L'ensemble des points M(x ;y ;z) tels que 2x-y+4 = 0 est un plan, pas une droite.
Proposition 2 : FAUX. Par définition du barycentre, pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

Ainsi, M' est défini par $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MG}$: on vient donc de définir une homothétie…

En effet, d'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$: homothétie de centre G et de rapport -3.

Proposition 3 : FAUX. Ces points sont coplanaires s'ils appartiennent tous à un même plan d'équation ax + by + cz + d = 0 donc s'ils existent a, b c et d non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} 1a+1b+0c+d=0 \\ 2a+0b+3c+d=0 \\ 0a-2b+5c+d=0 \\ 1a-5b+5c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ 2a+3c+d=0 \\ 2b+5c+d=0 \\ a-5b+5c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ L_2-2L_1 : -2b+3c-d=0 \\ 2b+5c+d=0 \\ L_4-L_1 : -6b+5c=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ \quad -2b+3c-d=0 \\ L_3+L_2 : 8c=0 \\ L_4-3L_2 : -4c+3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ \quad -2b+3c-d=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Proposition 4 : VRAI. Déterminons la distance de Ω au plan P : 2x + 2y + z + 3 = 0 : $d = \frac{|6+6+0+3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{15}{3} = 5$, rayon de la sphère…

5. Exercice 4

1a. La répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes donne un schéma de Bernoulli. Comme X compte le nombre d'apparitions de la face 6 (succès), X suit une loi $B\left(3, \frac{1}{6}\right)$ (dé bien équilibré).

1b. D'après le cours, E(X) = $3 \times \frac{1}{6} = 0.5$.

1c. Toujours d'après le cours, on a $p(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{6^3}$.

2a.

> D'après le calcul précédent, on a $p(D \cap A) = p(D)\, p_D(A) = \frac{1}{2} p(X=2) = \frac{15}{2\times 6^3}$.

> Si Y désigne la v.a. qui compte le nombre de 6, sur 3 lancés, avec le dé truqué, Y suit une loi binomiale $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ donc $p(Y=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$. Par conséquent, $p\left(\overline{D} \cap A\right) = p\left(\overline{D}\right) p_{\overline{D}}(A) = \frac{1}{2} p(Y=2) = \frac{1}{9}$.

2b. D et $\overline{D}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a $p(A) = p(A \cap D) + p\left(A \cap \overline{D}\right) = \frac{1}{9} + \frac{15}{2\times 6^3} = \ldots = \frac{7}{48}$.

2c. On cherche cette fois ci $p_A\left(\overline{D}\right) = \frac{p\left(\overline{D} \cap A\right)}{p(A)} = \frac{1/9}{7/48} = \frac{48}{63} = \frac{16}{21}$.

3a. L'évènement $\overline{B_n}$ consiste à ne faire aucun 6 : avec le dé équilibré, en n jets la probabilité est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$; avec le truqué elle est de $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Au total, le choix des dés étant équiprobable, la probabilité de $\overline{B_n}$ est $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (formule des probabilités totales).

Par conséquent $p_n=1-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

3b. Rappelons que si -1<q<1, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} p_n=1-0=1$! On est donc sûr, en faisant suffisamment de lancés, d'obtenir au moins un 6 avec un dé.